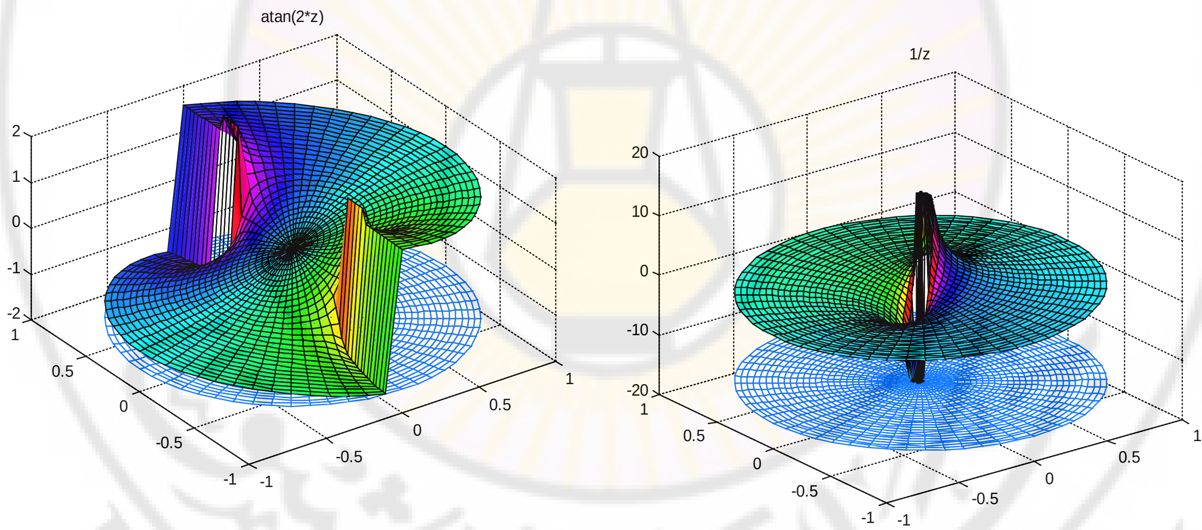
منشورات جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

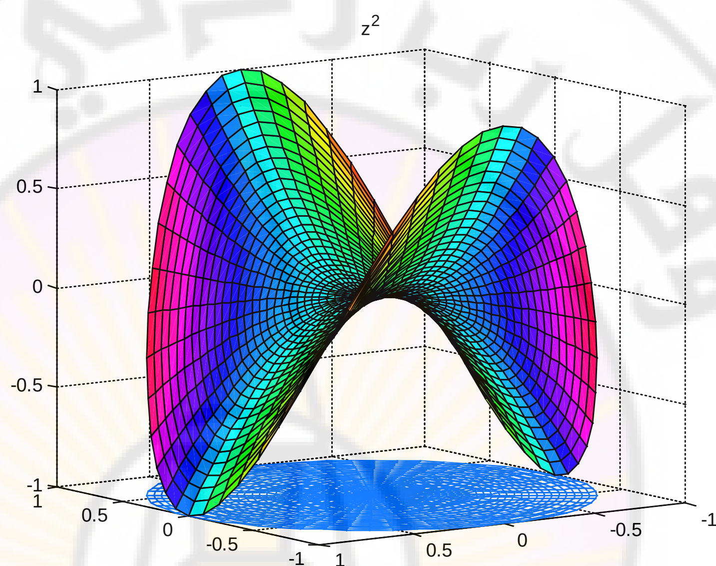


الرياضيات
4

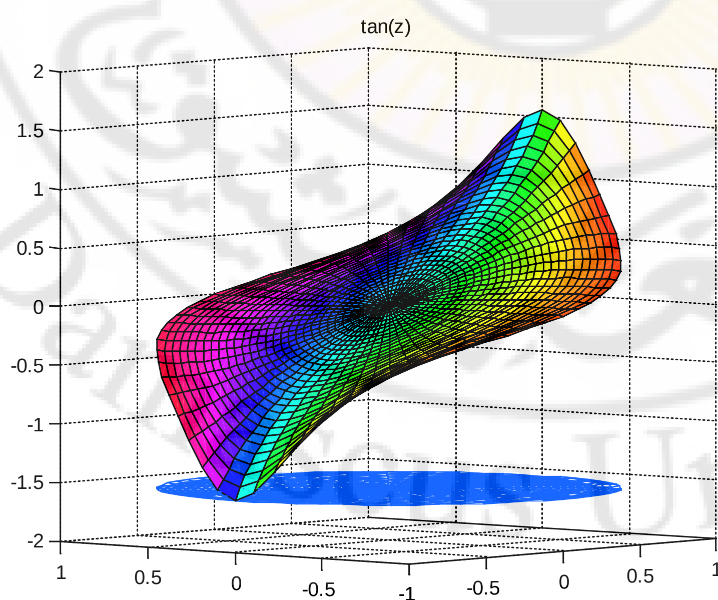


الدكتور
عازار معروف الشايب
أستاذ في قسم العلوم الأساسية

جامعة دمشق
1430 – 1431 هـ
2009 – 2010 م



z^2
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1



tan(z)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1



الرياضيات 4





منشورات جـامعة دمشـق

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الريـــاضيـــات

4

الدكتور

عازار معروف الشايب

أستاذ في قسم العلوم الأساسية

1430 – 1431 هـ

2009 – 2010 م

جامعة دمشق



الفهرس

العنوان	رقم الصفحة

مقدمة

بعد إقرار الخطة الدراسية الجديدة لكلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية في جامعة دمشق جرت وفق هذه الخطة تعديلات على بعض المقررات وألغيت وأضيفت مقررات جديدة، وما يخص قسمنا قسم العلوم الأساسية فقد ألغي مقرر رياضيات 5 لقسمي الكهرباء والميكانيك ووزعت مفرداته على مقررات أخرى.

عندما كلفت بإعداد مخطوطة كتاب رياضيات 4 لكافة الاختصاصات في السنة الثانية في كليتنا (عدا قسم الحواسيب) وجدت أن مفردات هذا المقرر واسعة بسبب كونها ناتجة عن مفردات مقررين سابقين هما مقرر رياضيات 4 ورياضيات 5، ولهذا توخيت عند إعداد هذه المخطوطة عدم الإسهاب في الشرح النظري قدر الإمكان والإكثار من التطبيقات البسيطة والمعقدة والتي حسب اعتقادي تساعد طالب العلوم الهندسية بتفهم الأبحاث النظرية واستخدامها من أجل تطبيقات علمية خاصة لدراسته بفرعيها، الميكانيكي والكهربائي وما يتفرع عنهما من فروع خاصة.

يتألف كتاب رياضيات 4 من ثلاثة أبواب: في الباب الأول تم بحث قضايا التحليل العقدي، نظرية التوابع التحليلية، ونظرية التكاملات العقدية ونظرية الرواسب والتطبيقات المحافظة، أما في الباب الثاني فقد خصص لنشر وتكامل فورييه والتوابع الخاصة، كما بحث في الفصل الثاني منه موضوع التوابع الخاصة فدرست بعض هذه التوابع بالتفصيل والبعض الآخر بإيجاز، وفي الفصل الثالث درسنا تحويلات لابلاس بكاملها وتحويل Z وتطبيقات هذه التحويلات، أما الباب الثالث فقد خصص لدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية وأعين بها المعادلات الفيزيائية الرياضية، ودرست أنماطاً ثلاثة لهذه المعادلات ثم وضحت الطرق الخاصة بحل هذه المعادلات ووضعت بعض التطبيقات.

أما فيما يختص بطرق الترميز والترقيم فقد اعتمدت أسلوب الثلاثية (أ . ب . ج) حيث يدل (أ) على الباب و(ب) على الفصل وأما (ج) فهي تدل على الفقرة.أما ترقيم المعادلات فإن ج تدل على الباب وب تدل على الفصل وأ تدل على الفقرة، وأخيراً، فقد رقمت الأشكال بالشكل (أ

– ب–جـ) حيث تدل أ على الباب و ب على الفقرة التي يتبعها الشكل وجـ رقمه ضمن ترتيب أشكال الفقرة.

أخيراً، أشكر كل من قرأ هذه المخطوطة من أساتذة (الدكتور محيي الدين بحبوح) وأساتذة مساعدين (الدكتور عماد فتاش والدكتور نظير هلال) والمهندسين سامر ومعين الخضور والطالب مازن صوفي ، وأبدوا ملاحظاتهم التي أخذت ببعض منها واستفدت من الأخرى.

أرجو أن أكون قد وفقت في عملي هذا وتلافيت أخطائي في المؤلفات السابقة ، كما أرجو من الأخوة القراء موافاتي بملاحظاتهم لأستفيد منها في الطبعة القادمة وفي مؤلفاتي الآتية.

معلولا 2008/9/14

عازار معروف الشايب



الباب الأول

التحليل العقدي

Complex Analysis



الفصــل الأول

الأعــداد العقـديـة

Complex numbers

تمهيد:

واجه الإنسان مسائل الطبيعة وحاول حلها ووجد أن بعض المسائل يمكن حلها في مجموعة عددية ما ولا يمكن حلها في مجموعة أخرى ؛ ولهذا حاول دوماً التوفيق بين حل مسائل ه ومجموعة الحل، فكان حل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى وبمجهول وحيد : مثل المعادلة $x + 5 = 13$ ليجد أن الحل عدد طبيعي، ثم واجه معادلات أخرى من نفس النوع ولكن لا يمكن حلها في تلك المجموعة «مجموعة الأعداد الطبيعية» مما أدى إلى إيجاد مجموعة أخرى تمكنه من حل مثل هذه المعادلات ، فكانت مجموعة الأعداد الصحيحة ثم العادية ثم غير العادية ثم الحقيقية.

ومن بعد ذلك واجه معادلات الدرجة الثانية التي يتطلب حلها إيجاد جذور أعداد حقيقية موجبة ثم سالبة ، وهذا أدى به إلى مجموعة جديدة أسماها مجموعة الأعداد العقدية (المركبة) التي تسمح له بحل مثل هذه المعادلات.

(1.1.1): مجموعة الأعداد العقدية (المركبة):

***The Complex Number (System C)*:**

لنعرف المجموعة C كما يلي:

$$C = R \times R = \{(x, y), x, y \in R\}$$

حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

ولنعرف على C العمليات التالية:

1 . عملية داخلية (+) الجمع:

$$\forall \quad (x_1, y_1);(x_2, y_2) \in C$$

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in C$$

2 . عملية خارجية الضرب على C مع حقل R:

$$\forall \quad k \in R, \quad (x, y) \in C:$$

$$k(x, y) = (kx, ky) \in C$$

3 . عملية الضرب على C:

$$\forall \quad (x_1, y_1);(x_2, y_2) \in C$$

$$(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in C$$

ووجد أن هذه العمليات تجعل من C فراغاً شعاعياً وحقلاً وفق قواعد الفراغ الشعاعي والحقل.

ووجد أيضاً أن المجموعة C تحوي مجموعتين جزئيتين منها وهما:

$$R_1 = \{(x,0), x \in R\} = R \times \{0\}$$

$$R_2 = \{(0, y), y \in R\} = \{0\} \times R$$

ووجد أيضاً أن هناك تقابلاً *1-1* بين المجموعة R_1 والمجموعة R بحيث يكون:

$$(x,0) \leftrightarrow x$$

مما سمح له أن يكتب تجاوزاً المساواة: $(x,0) = x$

كما وجد أيضاً أن العنصر $(0, 1) \in R_2$ يحقق الصفة:

$$(0,1)*(0,1)=(-1,0)=-1$$

فإذا رمزنا بـi لهذا العنصر وجدنا:

$$i.i=(-1,0)=-1$$

$$i^2=-1\Rightarrow i=\sqrt{-1}$$

وسمي هذا العنصر بالعنصر التخيلي.

واعتماداً على ذلك نسمي R_1 مجموعة الأعداد الحقيقية في R_2, C مجموعة الأعداد التخيلية في C.

ووجد أيضاً أن جداء أي عنصر من R_1 بـi يجعله في R_2 والعكس صحيح أي:

$$(x,0)*(0,1)=(0,X)\in R_2$$

$$(0,y)*(0,1)=(-y,0)\in R_1$$

وبسهولة نجد أن:

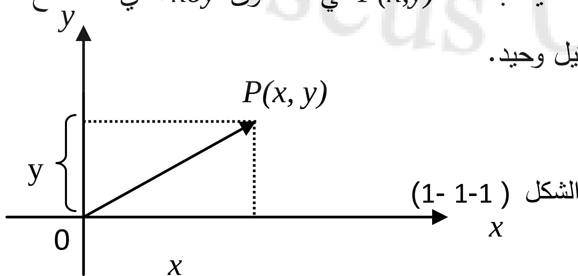
$$i=\sqrt{-1}\quad,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\qquad i^4=1$$

(2.1.1): تمثيل الأعداد العقدية:*Representation of The complex numbers*

إن العدد العقدي بالتعريف هو ثنائية (x,y) ولهذا يمكننا أن نمثله بأشكال مختلفة.

1 . التمثيل النقطي:

إن كل عدد عقدي $Z = (x,y)$ يمكن تمثيله بنقطة $P(x,y)$ في المستوى xoy الذي نصطلح على تسميته بالمستوى العقدي وهذا التمثيل وحيد.



الشكل (1-1 -1)

2 . التمثيل الشعاعي:

إن العدد العقدي $Z = (x,y)$ يمكن تمثيله بشعاع $\overrightarrow{OP}$ حيث $P(x,y)$، وهذا التمثيل وحيد أيضاً.

3 . التمثيل الديكارتي:

يمكننا الاعتماد على التمثيل السابق وكتابة:

$$Z = (x,y)= (x,0) + (0,y)$$

وحسب خواص عملية الجمع والضرب يمكننا كتابة:

$$Z = (x, y) = (x,0) + (0,1) * (y,0)$$

$$Z = x + iy$$

بسهولة نرى: $Z(x, y) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

بتقريب $k.2\pi$ حيث k عدد صحيح.

5 . التمثيل الأسي: من التمثيل المثلثاتي السابق نلاحظ بالاعتماد على دساتير النشر للتوابع $Sin\theta$ و $cos\ \theta$ و $e^{i\theta}$ أن: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

وبالتالي:

$$Z(x, y) = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$Z(x, y) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z(x, y) = re^{i\theta}$$

(3.1.1): تعريف:

بفرض $Z = x + iy$ عدد عقدي، نسمي العدد العقدي $\overline{Z} = x - iy$ مرافق العدد Z.

نلاحظ أننا حصلنا على المرافق باستبدال y- بـy في التمثيل الديكارتي.

أما المرافق بالشكل الأسي فيتم باستبدال θ- بـθ أي مرافق $Z= re^{+i\theta}$ هو $\overline{Z} = re^{-i\theta}$.

(4.1.1): العمليات على الأعداد العقدية:

Fundamental Operations with complex numbers:

أ . بفرض $Z_1 = x_1 + iy_1$ عدد عقدي، و $Z_2 = x_2 + iy_2$ عدد عقدي آخر.

نسمي بالتعريف:

$$Z = Z_1 \pm Z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

المجموع الجبري للعدديين العقديين Z_1 ,Z_2 ونلاحظ أنه لجمع عدديين عقديين نجمع القسمين الحقيقيين معاً ونجمع القسمين الوهميين كلاً على حدة.

ب . إن عملية الضرب تتم كما في عملية الضرب العادي فقط باستبدال -1 بـi^2 أي:

$$Z = (x_1 + iy_1) \otimes (x_2 + iy_2) = x_1 y_2 i + x_1 x_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$Z = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ج . أما حاصل قسمة العدد Z_1 على Z_2 فيتم باستخدام مفهوم المرافق وتحويل عملية القسمة إلى ضرب:

$$Z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1).(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2).(x_2 - iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$Z=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

إن عملية الضرب والقسمة يمكن أن تتم بشكل أسهل فيما لو استخدمنا الشكل الأسي:

$$Z=Z_1.Z_2=r_1.e^{i(\theta_1+2\pi k_1)}.r_2.e^{i(\theta_2+2\pi K_2)}$$

$$=r_1.r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2+2\pi(k_1+k_2))}$$

$$=r_1.r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2+2\pi k)}$$

أي لضرب عددين عقديين بالشكل الأسي ما علينا سوى جمع الزاويتين وضرب الطويلتين.

يمكن تعميم ذلك على حالة الرفع لقوة (أس):

$$Z=(Z_1)^n=r_1^n.e^{i(\theta_1+2\pi nk_1)}$$

أي لضرب عددين عقديين بالشكل الأسي ما علينا سوى جمع الزاويتين وضرب الطويلتين ويمكن أن نعمم ذلك من أجل الرفع الى أس n (n عدد صحيح).

وفي حالة القسمة نجد:

$$Z=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1.e^{i(\theta_1+2\pi k_1)}}{r_2.e^{i(\theta_2+2\pi k_2)}}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2+2\pi(k_1-k_2))}$$

أي بتقسيم عددين عقديين نحصل على عدد عقدي طويلته حاصل قسمة الطويلتين وزاويته حاصل طرح الزاويتين.

د . الرفع إلى أس كسري:

ليكن المطلوب رفع العدد العقدي

$$Z = r.e^{i(\theta+2\pi k)}$$

إلى الأس الكسري $\frac{m}{n}$

فنجد

$$Z^{\frac{m}{n}} = \left[r.e^{i(\theta+2k\pi)}\right]^{\frac{m}{n}}$$

$$= r^{\frac{m}{n}}.e^{i.\left(\frac{m}{n}\theta+2\frac{km}{n}\pi\right)}$$

$$Z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}.e^{im\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k_1}{n}\right)}$$

حيث $K_1 = 0,1,2,3\ldots\ldots\ldots n-1$

أي أنه نحصل على n جذراً مختلفاً هي:

$Z_0, Z_1, \ldots\ldots\ldots, Z_{n-1}$

أما Z_n فهو مطابق Z_0 ويختلف عنه بالعمدة فقط بـ $2k\pi$، أي أن الجذور $Z_0, Z_1, \ldots\ldots, Z_{n-1}$ تشكل مضلعاً نجمياً منتظماً نصف قطره $r^{\frac{m}{n}} = \left|Z^{\frac{m}{n}}\right|$ وزاويته المركزية المقابلة لضلع منه هي $\frac{2\pi}{n}$.

هـ. لغارتم العدد السالب:

نعلم من دراسة التوابع الحقيقية أن العدد السالب ليس له لغارتم ولكن في الساحة العقدية يمكن إيجاد لغارتم للعدد السالب كما سنرى، ليكن $\alpha > 0$ موجباً إن $-\alpha < 0$ أصغر من الصفر.

$$\ln(-\alpha) = \ln(-1)(\alpha)$$

وحسب خواص اللغارتمات.

$$\ln(-\alpha) = \ln(-1) + \ln\alpha$$

لكن $-1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$

ومنه:

$$\ln(-\alpha) = \ln(e^{i(\pi+2\pi k)}) + \ln\alpha$$

$$\ln(-\alpha) = \ln\alpha + i(\pi + 2k\pi)$$

أي أن العدد السالب له لغارتم وهو عدد عقدي كثير التعينات.

و. رفع عدد عقدي إلى أس عقدي:

بفرض $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ عدد عقدي وليكن المطلوب حساب Z^{β} حيث $Z = x + iy$ انطلاقاً من المطابقة:

$$Z^{\beta} = e^{\beta \ln Z} \quad \Leftrightarrow \quad \beta \ln z = \beta \ln z$$

$$Z^{\beta}=e^{(\beta_1+i\beta_2)[\ln r+i(\theta+2\pi k)]}$$

حيث: $Z=re^{i(\theta+2\pi k)}$

$$=e^{(\beta 1+i\beta 2)[\ln r+i(\theta+2\pi k)]}$$

$$=e^{(\beta_1\ln r-\beta_2(\theta+2\pi k))+i(\beta_1(\theta+2\pi k)+\beta_2\ln r)}$$

$$=r[\cos\phi+i\sin\phi]$$

حيث:

$$r=e^{\beta_1\ln r-\beta_2(\theta+2\pi k)}$$

$$\phi=\beta_1(\theta+2\pi k)+\beta_2\ln r$$

أي أن Z^{β} عدد عقدي متعدد القيم نحصل على القيمة الرئيسية بوضع *K=0*.

(5.1.1): خواص طويلات الأعداد العقدية:

لقد وجدنا من تعاريفنا السابقة أن طويلة عدد عقدي *z* هي بالتعريف:

$$|Z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}=\sqrt{x^2+y^2}$$

وأن $|Z|\geq \mathrm{Re}(z),\quad |Z|\geq \mathrm{Im}(z)$

نلاحظ من التعريف السابق وتعريف المرافق أن:

$$|Z|=|\overline{Z}|\ ;\ Z.\overline{Z}=|Z|^2$$

كذلك نلاحظ بسهولة صحة ما يلي:

$$|Z_1.Z_2.................Z_n|=|Z_1|.............|Z_n| \qquad (1)$$

وعندما تكون الأعداد متساوية نجد $|Z^n| = |Z|^n$

(2) $$|Z_1 + ...Z_n| \le |Z_1| + ... + |Z_n|$$

حسب قاعدة أضلاع مثلث.

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

(6.1.1): المتحول العقدي *(Complex variables)*:

بفرض D مجموعة من الأعداد العقدية، فإذا كان $Z = x + iy = re^{i\theta}$ عنصراً منها فإننا نسمي Z متحولاً عقدياً في D.

إن r, θ, y, x أعداد حقيقية (متحولات حقيقية) وبما أن Z يُمثل هندسياً بنقطة في المستوى oxy؛ لهذا تكون D مجموعة نقطية ، وكل ما نعرفه عن المجموعات النقطية في المستوى الحقيقي يمكن تعميمها على المجموعات النقطية في Z، ومثال ذلك الجوار والنطاق والمنطقة.

إن مجموعة النقاط Z المحققة لمساواة تمثل في المستوى العقدي منحنياً، أما المتراجحة فتمثل نطاقاً في المستوي، وعندما يشمل التراجح المساواة عندها نحصل على المنطقة في المستوي Z..

مثلاً $|Z| = 2$ تمثل معادلة دائرة $x^2 + y^2 = 4$

بينما $|Z| < 2$ تمثل قرصاً دائرياً $x^2 + y^2 < 4$

و $|Z| \le 2$ تمثل قرصاً دائرياً مع المحيط $x^2 + y^2 \le 4$

تمارين محلولة (1 – 1 – 7) *(Solved Problems)*

مثال 1:

بسط التركيب العقدي التالي:

$$Z = 2 + 2i - \frac{2}{2 + 2i}$$

واكتب الناتج بالشكل الجبري والمثلثاتي:

الحل:

$$Z = 2 + 2i - \frac{2(2 - 2i)}{4 + 4}$$

$$= 2 + 2i - \frac{4 - 4i}{8}$$

$$= 2 + 2i - \frac{1 - i}{2}$$

$$2 + 2i - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$Z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i = x + iy$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{5}{2}$$

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}}$$

$$r = \frac{\sqrt{34}}{2} \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال 2:

احسب الجذور من المرتبة الرابعة للعدد 1:

الحل:

$$Z = 1 = e^{i(2k\pi)}$$

$$Z^{\frac{1}{4}} = e^{i(\frac{2\pi k}{4})} \qquad k = 0,1,2,3$$

$$Z_0 = 1$$

$$Z_1 = e^{i(\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$Z_2 = e^{i(\frac{\pi 4}{4})} = e^{i(\pi)} = -1$$

$$Z_3 = e^{i(\frac{3\pi}{2})} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^3 = -i$$

نلاحظ أن:

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$$

مثال 3:

عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد العقدي:

$Z = \ln(3+i)$

لنكتب العدد $Z = 3+i$ بالشكل الأسي.

$x = 3 \qquad\qquad y = 1$

$r = \sqrt{3^2 + 1^2} = 2$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.32 \ Rad$

$= 18.32 \quad Dgr$

$Z = \ln(2e^{i(18.32+360k)})$

$Z = \ln 2 + i(18.32 + 360k)$

مثال 4:

احسب الأجزاء الحقيقية والعقدية للتراكيب التالية:

$Z_1 = \ln(-5) \quad , \quad Z_2 = \ln(\sqrt{3} + i)$

$Z_3 = (i)^i \quad , \quad Z_4 = \ln(2 - 2i)$

الحل:

$Z_1 = \ln(-1)(5) = \ln(-1) + \ln 5$

$= \ln 5 + \ln(e^{i(\pi + 2\pi k)})$

$= 0.6989 + i(\pi + 2\pi k) \quad ; \quad x = 0.6989 \quad ; \quad y = (\pi + 2\pi k)$

$Z_2 = \ln(\sqrt{3} + i)$

لنكتب العبارة $\sqrt{3}+i$ بالشكل الأسي:

فنجد:

$$x=\sqrt{3} \qquad , \qquad y=1$$

$$r=\sqrt{3+1}=2$$

$$\theta_2 = tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$Z_2 = \ln[2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)}]$$

$$=\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$$

$$=0.301+i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \quad ; \; x = 0.301 \quad ; \quad y=\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

$$Z_3=(i)^i$$

إن $i=e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$

$$(i)^i = e^{i\ln i}$$

$$=e^{i\ln(e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)})}$$

$$=e^{i[i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)]}$$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}}.e^{i2\pi k}=e^{-\frac{\pi}{2}}=x, \qquad y=0$$

$$Z_4=\ln(2-2i)$$

لنكتب العبارة $2-2i$ بالشكل الأسي.

$$x = 2 \qquad y = -2$$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right) = tg^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$Z_4 = \ln 2\sqrt{2}e = \ln 2^{\frac{3}{2}} + i(\frac{7}{4}\pi + 2\pi k)$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 + i(\frac{7}{4}\pi + 2\pi k)$$

مثال 5:

بفرض إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي:

$$A(1,2) \quad , \quad B(4,-2), \quad C(1,-6)$$

برهن أن هذا المثلث متساوي الساقين واحسب أطوال أضلاعه معتمداً على مفهوم العدد العقدي.

الحل:

نلاحظ أن النقاط C, B, A تمثل الأعداد العقدية التالية:

$$A \equiv Z_1 = 1 + 2i \qquad B \equiv Z_2 = 4 - 2i$$

$$C \equiv Z_3 = 1 - 6i$$

وبالتالي يمكن معرفة أطوال أضلاع المثلث السابق كما يلي:

$$|Z_1 - Z_2| = |(1-4) + i(2+2)| = |(-3)^2 + (4)^2|$$

$$= \sqrt{9+|6|} = 5$$

$$|Z_1 - Z_3| = |(1-1) + i(2+6)|$$

$$= |i(8)| = 8$$

$$|Z_2 - Z_3| = |(4-1) + i(-2+6)|$$

$$= \sqrt{9+16} = 5$$



المثلث متساوي الساقين.

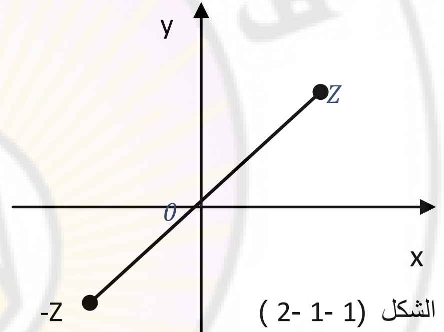
مثال 6:

بفرض Z عدد عقدي حيث $Z = x + iy$ أو $Z = re^{i\theta}$ معلوم ، عين بالرسم الأعداد التالية:

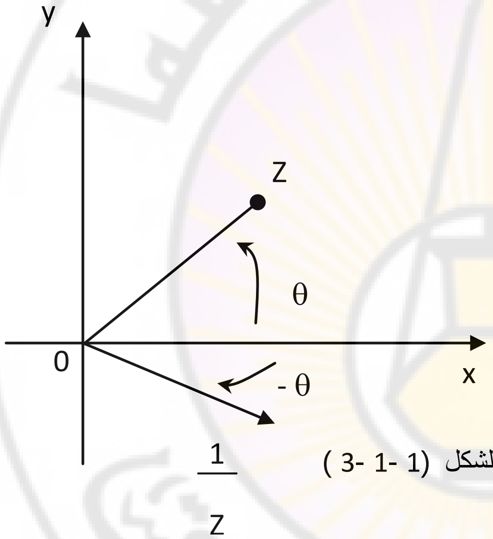
$$\overline{Z}, \quad -Z, \quad \frac{1}{Z}, \quad Z^2$$

الحل:

إن $-Z = -x - iy$



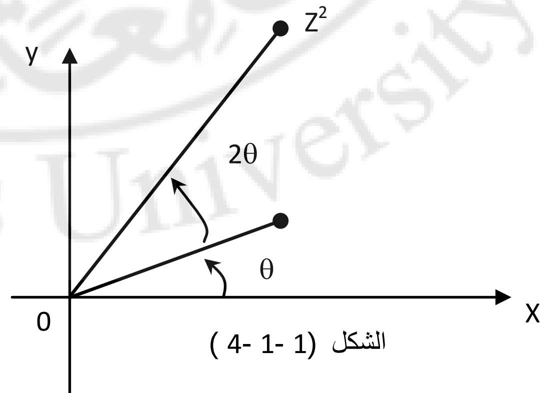
الشكل (1 -1 -2)



الشكل (1 -1 -3)

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$Z^2 = re^{i\theta}.re^{i\theta} = r^2.e^{2i\theta}$$



الشكل (1 -1 -4)

مثال 7:

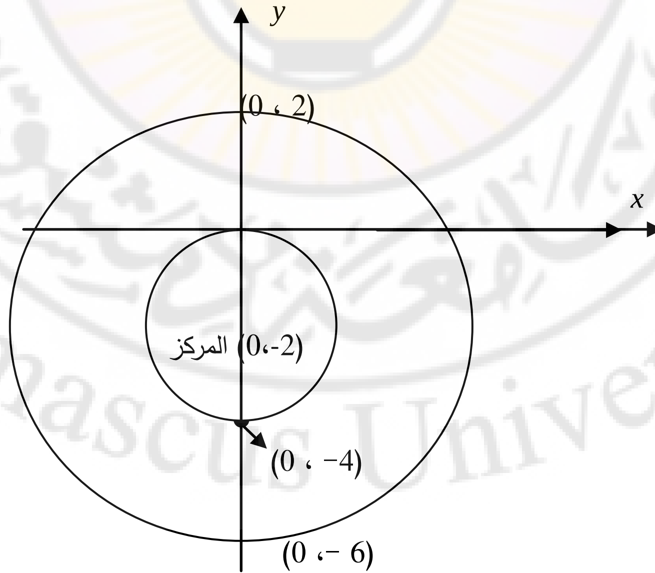
عين في المستوي العقدي Z المجموعات النقطية التالية:

أ . $2 \le |Z + i2| \le 4$ ب . $\arg\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right) = 0$

ج . $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| = 2$ د . $\left|\frac{Z+2}{Z-2}\right| > \frac{1}{2}$

هـ . $5 \le |Z+1| + |Z-1|$ و . $|Z+1|\,|Z-1| = 1$

أ . سوف نحل هذه المسألة هندسياً أولاً ثم جبرياً : المجموعة $2 \le |Z + 2i|$ تمثل خارج ومع محيط الدائرة مركزها $(0 \quad , \quad -2)$ ونصف قطرها 2، والمجموعة $|Z + 2i| \le 4$ تمثل داخل الدائرة وبالتالي المجموعة المطلوبة هي خارج الدائرة الأولى وداخل الثانية مع أخذ المحيطين.



الشكل (1 -1 -5)

ب . عين المجموعة $\arg\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)=0$ لأجل ذلك نبسط عبارة $\frac{Z+1}{Z-1}$

$$\frac{Z+1}{Z-1}=\frac{x+1+iy}{x-1+iy}=\frac{[x+1+iy][x-1-iy]}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2-1+y^2+i[y(x-1)-y(x+1)]}{(x-1)^2+y^2}$$

حسب الشرط يجب أن يكون البسط معدوماً أي:

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y(x-1)-y(x+1)=0$$

$$x^2+y^2-1=0 \quad y=0$$

والنقاط هي نقاط الدائرة ومحور السينات، أي: $x=\pm 1$ وبشكل عام $y=0$ يحقق أيضاً

$$\arg\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)=0$$

ج . $\left|\frac{Z-1}{Z+1}\right|=2$

$$\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}=4$$

$$x^2-2x+1+y^2=4x^2+8x+4+4y^2$$

$$3y^2+3x^2+10x+3=0$$

$$(x^2+y^2)+\frac{10}{3}x+1=0$$

$$x^2+\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+y^2+1=0$$

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2-\frac{16}{9}=0$$

دائرة مركزها $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ نصف قطرها $\frac{4}{3}$

د . $\left|\frac{Z+2}{Z-2}\right|>2$

$$\left|\frac{x+2+iy}{x-2+iy}\right|>2$$

$$\frac{(x+2)^2+y^2}{(x-2)^2+y^2}>4$$

$$x^2+4x+4+y^2>4x^2-16x+16+4y^2$$

$$3(x^2+y^2)-20x+12<0$$

$$x^2+y^2-\frac{20}{3}x+4<0$$

$$x^2-\frac{20}{3}x+\frac{100}{9}+y^2-\frac{100}{9}+4<0$$

$$\left((x-\frac{10}{3}\right)^2+y^2-\frac{64}{9}<0$$

داخل دائرة مركزها $\left(\frac{10}{3},0\right)$ نصف قطرها $\frac{5}{3}$

هـ . $|Z+1|+|Z-1|\geq 5$

مجموعة النقاط التي مجموع بعديها عن (1،−1) أكبر أو يساوي 5 فهي خارج قطع ناقص محرقاه(1، 1−) ونصف محوره الكبير $\frac{5}{2}$.

و .

$$|Z+1|.|Z-1|=1$$

$$\left[(x+1)^2+y^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]=1$$

$$(x^2+y^2+1)^2-4x^2=1$$

$$(r^2+1)^2-4r^2\cos^2\theta=1$$

$$r^4+2r^2-4r^2\cos^2\theta=0$$

$$r^2(r^2+2-4\cos^2\theta)=0$$

$r^2=4\cos^2\theta 2$ أو $r=0$

$$r^2=2(2\cos^2\theta-1)=2(1+\cos 2\theta-1)$$

$$r^2=2\cos 2\theta$$

تمارين إضافية (1- 1 -8) Supplementary Problems:

1 . اكتب الأعداد التالية بالشكل $x+iy$

أ . $(2-i)(-2+2i)(5-4i)$

ب . $(-1+3i)(7-5i)+3-4i$

ج . $3i-5 \quad - \quad 6-2i$

2 . ليكن $Z_2=-1+5i \quad Z_1=2-3i$

أوجد $\frac{Z_1}{Z_2}$ وفق التمثيل المثلثي.

3 . برهن واعتماداً على الأعداد العقدية أن أقطار متوازي الأضلاع متناصفة.

4 . أوجد اعتماداً على الأعداد العقدية معادلة المستقيم الواصل بين نقطتين $B(x_2,y_2),\ A(x_1,y_1)$.

5 . أوجد معادلة الدائرة ذات المركز (1، 2−) ونصف قطرها 4.

6 . أوجد معادلة القطع الناقص ذي نصف المحور الكبير المساوي لـ5 والصغير المساوي لـ4 ومحوره ينطبق على محور السينات.

7 . مثل العدد العقدي $Z=2+2\sqrt{3}i$ بالشكل القطبي ثم الأسي.

8 . رجل تحرك *12km* باتجاه الشمال الشرقي ثم تحرك باتجاه °30 غرب الشمال ثم *18km* باتجاه جنوب الغرب.

أوجد بطريقة تعتمد على الأعداد العقدية الاتجاه والبعد الذي أصبح فيه عن نقطة الانطلاق.

9 . برهن على صحة العلاقة التالية اعتماداً على تمثيل أولر للتوابع المثلثية..

$$Sin^3\theta = \frac{3}{4}Sin\theta - \frac{1}{4}Sin3\theta$$

10 . أوجد ناتج ما يلي:

$$Z = (-1+i)^{\frac{1}{3}}$$

11 . أوجد الجذر التربيعي لكل من الأعداد التالية:

$$-15+8i \quad , \quad 9+\frac{5}{2}i \quad , \quad 5+3i$$

12 . أوجد جذور المعادلة:

$$Z^6 = 1$$

13 . برهن أن مجموع جذور المعادلة:

$$Z^n = 1$$

(n طبيعي) يساوي الصفر.

14 . برهن على صحة ما يلي:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + Cos\frac{4\pi}{n} + ...+ Cos\frac{2(n-1)}{n}\pi = -1$$

$$Sin\frac{2\pi}{n} + Sin\frac{4\pi}{n} + ...+ Sin\frac{2(n-1)}{n}\pi = 0$$

15 . إذا كان جداء عدديين عقديين هو عدد حقيقي غير الصفر برهن أن هناك عدداً حقيقياً P بحيث: $Z_1 = P\overline{Z}_2$ حيث Z_2, Z_1 هما العددان العقديان.



الفصل الثاني

التوابع العقدية

(Complex Functions)

تمهيد:

لقد وجدنا أن المجموعة C مجموعة الأعداد العقدية هي مجموعة ثنائيات (x, y)، ووجدنا أن الأعداد العقدية يمكن تمثيلها بأكثر من شكل، وأن هذه الأعداد تشكل مجموعات نقطية.

بفرض D نطاق وبفرض:

$$Z = x + iy = re^{i\theta}$$

متحول في D:

(1 .1.2)تعريف:

لنقابل كل عنصر *Z* من *D* بعنصر *W* من `*D* من مستوي *uov* كما يلي:

$$Z = x + iy = re^{i\theta} \rightarrow w = f(z) = u + iv$$
$$= \rho e^{i(\psi + 2\pi K)}$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تعرف تابعاً متعدد القيم نسمي هذه العلاقة بتابع عقدي متعدد القيم، كما يسمى التعين الذي يقابل قيمة معينة (عادة تؤخذ *k=0*) لـ*k* بتعين رئيسي.

إذا لم نشِر للعدد k عندها نقصد التعين الرئيسي.

التابع العكسي *(Inverse Functions)*:

إذا اقتصرنا على التعين الرئيسي للتابع $W = f(z)$ عندها يمكننا تعريف التابع العكسي ونرمز له بـ $Z = W^{-1} = f^{-1}(w)$.

(2.2.1): نهاية تابع عقدي *(The limit of complex function)*:

بفرض *D* نطاق من المستوي xoy ، وليكن $W = f(z)$ تابعاً عقدياً من *D* إلى *D`* في المستوي uov ولتكن Z_0 نقطة من المستوي xoy .

إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$\forall \quad \left| Z - Z_0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| f(z) - L < \delta \right|$$

حيث L قيمة ما.

نقول إن التابع $f(z)$ ينتهي إلى L عندما Z تنتهي إلى z_0 ونكتب:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

(3.2.1): استمرار تابع *(The continuity of function)*:

ملاحظة: كل تابع مستمر في نقطة له نهاية، ولكن إذا كانت له نهاية فليس بالضرورة أن يكون مستمراً (بل قد لا يكون معرفاً في تلك النقطة).

إذا كانت $Z_0 \in D$ وكانت

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

عندها نقول إن $f(z)$ مستمر عند z_0 ونكتب:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

(1 . 2 . 4): اشتقاق تابع عقدي:

إذا كان للنسبة التالية:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

نهاية عندما Δz تسعى إلى الصفر فإننا نسمي هذه النهاية مشتق التابع $f(z)$ عند النقطة z ونرمز لذلك بـ:

$$W` = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$W` = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{df(z)}{dz}$$

$$W` = \frac{df(z)}{dz}$$

$$df(z) = W`dz$$

يمكن تعريف المشتقات من مرتبة أعلى وفق نفس الطريقة ، وسوف نرى مستقبلاً أن التابع العقدي يتحلى بالصفة التالية:

إذا وجد لـ$f(z)$ مشتق فإن كل المشتقات التالية تكون موجودة.

(هذه الصفة غير موجودة في التوابع الحقيقية).

يمكن أن يكون التابع $f(z)$ مستمراً في نقطة Z_0 دون أن يكون له مشتق فيها مثل التابع $f(z)=|z|$ ، بينما إذا كان $f(z)$ يقبل الاشتقاق في Z_0 فهو مستمر فيها.

(1 . 2 .5): التابع التحليلي *(Analytic Functions)*:

نقول عن $f(z)$ إنه تحليلي في نقطة Z إذا كان له مشتق في جوار لـZ (أي في كل نقطة من ذلك الجوار)، ويكون تحليلياً على نطاق D إذا كان يقبل الاشتقاق في كل نقطة منه.

(1 .2 .6): نظرية كوشي ريمن في التوابع التحليلية:

بفرض $f(z) \rightarrow Z$ تابعاً معرفاً على نطاق D ويأخذ قيمة نطاق $D`$ وبفرض:

$$W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= re^{i(\theta+2\pi k)}$$

(1. 2 .7): مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي ليكون $f(z)$ تحليلياً على D هو (في الإحداثيات الديكارتية):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

أو في الإحداثيات القطبية:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

كفاية الشرط:

حتى يكون $W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلياً على D يكفي وجود المشتقات الجزئية التالية وتحقيق معادلتي كوشي ريمن.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dv}{\partial x}$$

البرهان:

بما أن $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ مستمران فرضاً عندها يمكن كتابة:

$$\Delta U = U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x,y)$$

$$\Delta U = \{U(x+\Delta x, y+\Delta y) - U(x, y+\Delta y)\} + \{U(x, y+\Delta y) - U(x,y)\}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1\right)\Delta y =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\Delta u}{\Delta y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y$$

حيث $\varepsilon_1 \to 0$ و $\eta_1 \to 0$ عندما $\begin{matrix}\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0\end{matrix}$ وبشكل مشابه يمكن استنتاج:

$$\Delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_2\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2\right)\Delta y$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \eta_2 \Delta y$$

حيث $\varepsilon_2 \to 0$ و $\eta_2 \to 0$ عندما $\begin{matrix}\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0\end{matrix}$

لدينا:

$$\Delta w = \Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y..................................(1)$$

حيث $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$ و $\eta=\eta_1+i\eta_2$ عندما $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$

وحسب علاقات كوشي ريمن المحققة نجد أنه يمكن كتابة العلاقة (1) كما يلي:

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y+\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y$$

$$\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y$$

نقسم الطرفين على $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ فنجد عندما $\Delta z\to 0$ ما يلي:

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{\Delta z\to 0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}$$

أي أن المشتق موجود والتابع تحليلي.

ملاحظة: $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y}{\Delta z}=0$ لأن البسط متناهٍ بالصغر من مرتبة ثانية بالنسبة للمقام.

لزوم الشرط:

لنفرض أن $f(z)$ تحليلي أي له مشتق، وبالتالي فإن النهاية التالية موجودة دون النظر إلى الطريق الذي تسعى فيه Δz إلى الصفر أي:

$$f`(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\qquad\forall\Delta z\to 0$$

$$f`(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{U(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$- \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{U(x,y) + iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

لنختَر $\Delta z = \Delta x$ عندها:

$$W` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x, y) - V(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i Lim \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}$$

$$W` = \frac{\partial u}{dx} + i \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

كذلك الأمر يمكن أن يكون $\Delta z = i\Delta y$ عندها وبسبب وجود المشتق يمكن كتابة:

$$W` = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{U(x, y+\Delta y) - U(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{V(x, y+\Delta y) - V(x,y)}{i\Delta y}$$

$$W` = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

من (2) و (3) نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

بالمطابقة نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

وهو المطلوب.

يمكن البرهان في الحالة القطبية كما يلي:

الطلب: $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

حيث:

$$f(z)=U(r,\theta)+iv(r,\theta)$$

لدينا:

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=rSin\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

لهذا يكون لدينا:

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{du}{dr}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{du}{d\theta}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}Cos\theta-\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}Sin\theta.....................(1)$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}+\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{du}{d\theta}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{du}{dr}Sin\theta+i\frac{du}{rd\theta}Cos\theta \qquad (2)$$

وبشكل مشابه نجد:

$$(3) \qquad \frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{dv}{dr}Cos\theta-\frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta}Sin\theta$$

$$(4) \qquad \frac{dv}{dy}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dy}+\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}=\frac{dv}{dr}Sin\theta+\frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta}Cos\theta$$

وحسب كوشي ريمان يلزم أن يكون:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

نجد من (1) و (4):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)Cos\theta=\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\right)Sin\theta \qquad ....(5)$$

كذلك الأمر من أجل $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ وفق (2) و (3) نجد:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)Sin\theta=-\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)Cos\theta..............(6)$$

نضرب (5) بـ $Cos\theta$ و (6) بـ $Sin\theta$ ونجمع فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

نضرب (5) بـ $Sin\theta$ و (6) بـ $Cos\theta$ ونجمع فنجد:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وهو المطلوب.

(8. 2. 1): التابع التحليلي ومعادلة لابلاس:

Analytic Function and Laplace equation:

بفرض $W = f(z) = u + iv$ تحليلياً عندها:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ومنه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

بالجمع نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 u(x, y) = 0$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 v(x, y) = 0$$

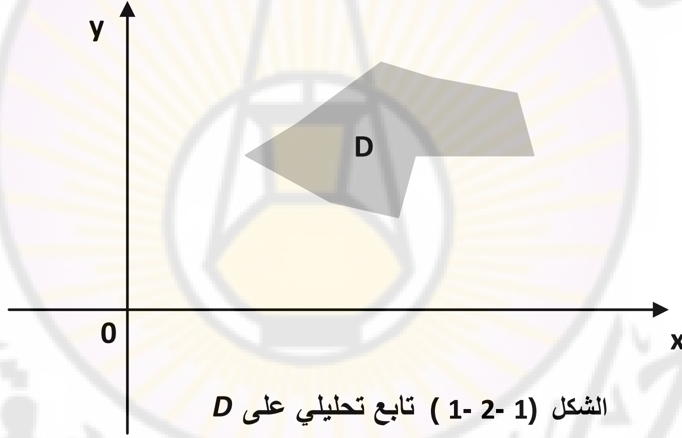
نسمي كلاً من v و u بجزءين توافقيين.

(1 .2 .9): التابع التحليلي والنقاط العادية والشاذة:

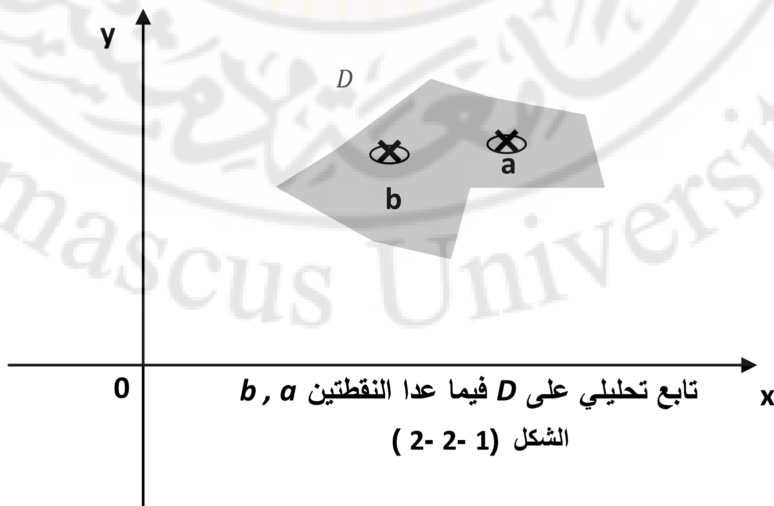
Analytic Function and Singular Points and Ordinary Point:

سوف نعتمد أن التابع التحليلي على نطاق هو تابع خالٍ من نقاط شاذة، وسوف نظلل ذلك النطاق كما في الشكل، وفي حال وجود نقاط شاذة سوف نضعها ضمن دائرة وإشارة × أي بالشكل ⊗.

النقاط التي لا يكون فيها التابع تحليلياً تسمى نقاطاً شاذة، سوف نأتي على ذكرها لاحقاً مع أنواعها، وإذا كانت النقطة غير شاذة تدعى نقطة عادية (إذا أمكن إيجاد جوار لها لا يحوي نقاطاً شاذة).



الشكل (1 -2 -1) تابع تحليلي على *D*



تابع تحليلي على *D* فيما عدا النقطتين *b , a*

الشكل (1 -2 -2)

(1 .2 .10): تصنيف النقاط الشاذة:

Classification of the Ordinary Points:

تعريف:

<u>1 . النقاط الشاذة المنعزلة وغير المنعزلة:</u>

نسمي النقطة $z = 0$ نقطة شاذة منعزلة بالنسبة للتابع $w = f(z)$ في نطاق D إذا وجد جوار لها داخل D بحيث أنه لا يحوي أي نقطة شاذة غيرها، وإذا لم نتمكن من ذلك دعيت نقطة شاذة غير منعزلة.

هناك نقاط شاذة يمكن إزالت شذوذها تدعى نقطة شاذة منعزلة القابلة للحذف، وهي تلك النقطة التي لا يكون فيها التابع $f(z)$ معرفاً ولكن له نهاية عندها:

مثال على ذلك:

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z + 1}$$

$z = -1$ شاذة يمكن إزالتها لأن:

$$\lim_{z \to -1} f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{(z-1)(z+1)}{z+1} = -2$$

يمكن تصنيف النقاط الشاذة كما يلي:

<u>2 . النقطة الشاذة القطب المضاعف من الرتبة n:</u>

نقول عن النقطة Z_0 إنها قطب مضاعف من الرتبة (أو الدرجة) n إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{z \to z0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0$$

$f(z_0)$ غير معرف.

وهي نهاية موجودة.

3 . النقطة الشاذة الأساسية:

$f(z_0)$ غير معين كذلك.

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)^n$$

غير معينة وذلك مهما تكن n (طبيعي).

4 . نقطة التفرع:

بفرض z_0 نقطة والتابع $W = f(z)$ يتحلى بالصفة التالية: إذا رسمنا أي منحنٍ مغلق يحيط بـ Z_0 وتجولنا حول Z_0 دورة كاملة تغيرت قيمة التابع، أي تفرعت قيمة. سوف نرى أمثلة على ذلك في التوابع اللغاريتمية والجذرية. (مع ملاحظة أن المنحني المغلق لا يحوي نقاطاً شاذة غير Z_0).

(1−2−11): التوابع الأساسية العقدية:

Fundamental Complex functions:

نسمي التوابع التالية بالتوابع الأساسية وهي تشمل كل التوابع الناتجة عنها بعمليات جبرية محدودة:

1 . تابع كثيرة الحدود (الحدودية) من الدرجة n .

إن الشكل العام للحدودية من الدرجة n بالمتحول z هو:

$$W = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

حيث $a_0 .... a_n$ ثوابت عقدية من C

يمكن التعويض بـ $Z = re^{i\theta}$ فنجد:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{i\theta k}$$

$$= \sum_{k}^{n} a_k r^k (Cos k\theta + i\ Sin\ k\theta)$$

$$= \sum_{k}^{n} U_k + iV_k$$

حيث:

$$U_k = a_k r^k Cos\ k\theta$$

$$V_k = a_k . r^k\ Sin\ k\theta$$

نلاحظ أن U_k و V_k يحققان شروط كوشي ريمن في الإحداثيات القطبية أي:

$$\frac{\partial u_k}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v_k}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_k}{\partial r}$$

والتابع تحليلي دوماً.

2 . التابع الجبري الكسري البسيط:

بفرض $W = f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ حيث $g(z)$ و $h(z)$ حدوديتان بـ z ليس بينهما عوامل مشتركة، ودرجة البسط أقل من درجة المقام بدرجة على الأقل.

إن هذا التابع تحليلي في كل المستوي فيما عدا النقاط التي تعدم المقام $h(z)$ (فهي نقاط شاذة لهذا التابع).

3 . التابع الجذري البسيط والعام:

بفرض $W = f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ نسمي هذا التابع بالتابع الجذري البسيط ونفرض أنه يمثل الفرع الأساسي، فإذا كان $Z = re^{i\theta}$ فيكون:

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

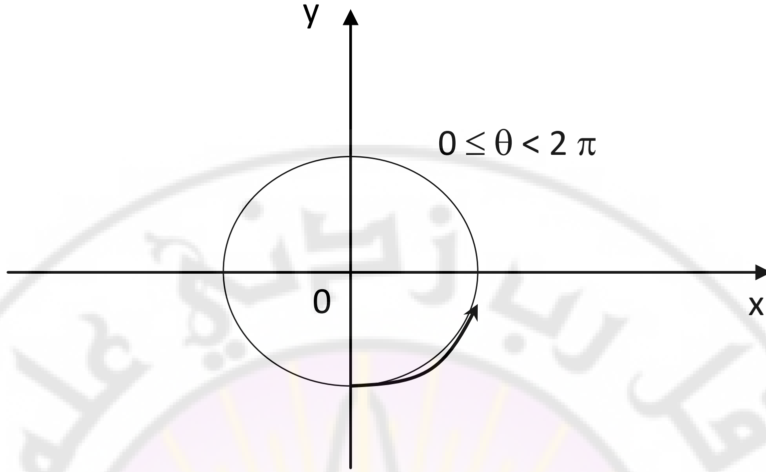
أما إذا كان:

$$Z = re^{i(\theta+2\pi k)}$$

فإن:

$$W = f(z) = r^{\frac{1}{n}}.e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}$$

إن هذا الفرع يبقى وحيد التعين طالما كانت زاويته θ تحقق: $0 \le \theta < 2\pi$ ، وهذا يعني هندسياً أن هناك حاجزاً لا يسمح لنصف القطر الشعاعي الذي يمثل Z بالدوران حول O دوره كاملة أي أن هناك حاجزاً يمنع ذلك، وكأن هذا الحاجز هو المحور ox كما في الشكل، نسمي هذا الحاجز مستقيم التفرع والنقطة O هذه (التي تتفرع قيم التابع فيما لو تجولنا حولها) بنقطة التفرع وهي تنتج عن وضع $Z = 0$.



الشكل (1 -2 -3)

والفرع الرئيسي كما أشرنا هو:

$$W = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (Cos\frac{\theta}{n} + iSin\frac{\theta}{n})$$

وهو كما نلاحظ يحقق شروط كوشي ريمن القطبية:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \; Cos\frac{\theta}{n} \quad ; \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} Sin\frac{\theta}{n}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \; Cos\frac{\theta}{n} \quad ; \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} Cos\frac{\theta}{n}$$

وهذه التوابع موجودة وبالتالي التابع تحليلي لأنها تحقق:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial u}{\partial r}$$

فالتابع الجذري البسيط تابع تحليلي على المستوي بعد حذف OX الموجب (مع O).

أما التابع الجذري العام $W = f(z) = [g(z)]^{\frac{1}{n}}$

فتنتج مستقيمات التفرع من وضع $g(z) = 0$ وبالتالي يكون تحليلياً على كل المستوي فيما عدا مستقيمات التفرع مثل:

$$W = \left[\frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

لدينا في هذا التابع النقطتان $Z = \pm i$ شاذتان وتفرع و $Z = \pm 1$ نقطتا تفرع.

4 . التابع اللغارتمي البسيط والعام: بفرض $Z = re^{i(\theta + 2\pi k)}$ نعرف التابع اللغارتمي البسيط كما يلي:

$$W = \ln z = \ln re^{i(\theta + 2\pi k)}$$

$$W = \ln r + i(\theta + 2\pi k)$$

نلاحظ أن هذا التابع متعدد القيم وفرعه الرئيسي:

$$W = \ln r + i\theta$$

ولهذا يلزم أن تكون $0 \le \theta < 2\pi$ ، أي هناك أيضاً بنفس طريقة المناقشة في الفقرة السابقة نقطة تفرع هي $Z = 0$ ، وهناك مستقيم تفرع ينطلق من 0 إلى ∞ وليكن ox ونلاحظ أن الفرع الرئيسي يحقق شروط كوشي ريمن:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

أي:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

أما التابع اللغارتمي العام فله الشكل:

$$W = f(z) = \ln g(z)$$

وهو تحليلي في المستوي أينما كان $g(z)$ تحليلياً وبعد حذف مستقيمات التفرع الناتجة عن وضع $g(z)=0$ ، وإذا كان $g(z)$ كسراً عندها:

$$g(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

أي:

$$W = \ln g(z) = \ln f_1(z) - \ln f_2(z)$$

وعندها تنتج مستقيمات التفرع من وضع $f_2(z) = f_1(z) = 0$.

5 . التابع الأسي والتابع الأسي العام:

يعرف التابع الأسي البسيط كما يلي:

$$W = f(z) = e^{z} = e^{x+iy}$$

$$= e^{x}.e^{iy} = e^{x}(Cosy + iSiny)$$

$$= e^{x}Cosy + ie^{x}Siny$$

وضوحاً هذا التابع دوري دوره 2π وهو أيضاً تحليلي دوماً.

أما التابع الأسي العام فهو $W=e^{g(z)}$ فهو تحليلي أينما كان $g(z)$ تحليلياً.

6 . التوابع الدائرية والتوابع القطعية:

تعرف هذه التوابع بوساطة التوابع الأسية أي:

$$Sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \forall Z$$

$$Cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \forall Z$$

$$tgz = \frac{Sinz}{Cosz} \qquad Cosz \neq 0, \quad z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

يمكن تعريف مقلوب التوابع السابقة أي $Cos(z)$ ، $Sec(z)$ و $ctg(z)$، أما التوابع القطعية فتعرفها كما يلي:

$$Shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad \forall Z$$

$$Chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad \forall Z$$

$$thz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \qquad e^{2z} \neq -1$$

كما يمكن تعريف المقلوب لكل من هذه التوابع أي:

$$Coshz \quad , \quad Sechz \quad , \quad Cothz$$

وتنطبق على هذه التوابع جميعها (السابقة) كل العلاقات المعروفة عليها في الساحة الحقيقية ، كما أنه بسهولة نجد العلاقات التالية:

$$Cosiz = Chz \qquad Siniz = iShz$$

$$Chiz = Cosz \qquad Shiz = iSinz$$

7 . التوابع الدائرية العكسية والقطعية العكسية:

يمكن تعريفها أيضاً اعتماداً على التوابع اللغارتمية ونحصل لكل منها على مستقيمي تفرع وهي:

$$W = Sin^{-1}z = arcSinz = \frac{1}{i}\ln\left[iz + (1-z^{e})^{\frac{1}{2}}\right] \quad z = \pm 1$$

$$W = \cos^{-1}z = arcCosz = \frac{1}{i}\ln\left[z + (z^{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right] \quad z \neq \pm 1$$

$$W = tg^{-1}z = arctgz = \frac{1}{2i}\ln\left[\frac{1+iz}{1-iz}\right] \quad z \neq \pm i$$

$$W = Sh^{-1}z = \arg Shz = \ln\left[z + (z^{2}+1)^{\frac{1}{2}}\right] \quad z \neq \pm i$$

$$W = Ch^{-1}z = \arg Chz = \ln\left[z + (z^{2}-1)^{\frac{1}{2}}\right] \quad z \neq \pm 1$$

$$W = th^{-1}z = \arg thz = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right] \quad z \neq \pm 1$$

8 . التابع الكسري ذو البسط والمقام التحليلين:

هو تابع تحليلي في المستوى Z باستثناء النقاط التي تعدم المقام، أما إذا انعدم البسط والمقام فإننا نطبق أوبيتال للتأكد من بقاء الشذوذ.

تمارين محلولة (1 – 2 – 12) Solved Problems

مثال (1):

أوجد التابع المشتق للتوابع التالية:

1. $W_1 = \dfrac{3z-1}{z^2-z+1}$

2. $W_2 = \ln(z^2-3z+1)$

3. $W_3 = \left(\dfrac{z+2}{z+1}\right)^{\frac{1}{4}}$

4. $W_4 = \dfrac{Cosz}{z^2}$

5. $W_5 = th^{-1}3z$

الحل:

(1) $W_1 = \dfrac{3z-1}{z^2-z+1}$

التابع كسري جبري بسيط له نقطتان شاذتان هما:

$$Z_1 = \frac{1+\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{1-\sqrt{1-4}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

ومشتقه:

$$W`_1 = \frac{3(z^2 - z + 1) - (2z - 1)(3z - 1)}{(z^2 - z + 1)^2}$$

$$W` = \frac{-3z^2 + 2z + 2}{(z^2 - z + 1)^2}$$

(2) $W_2 = \ln(z^2 - 3z + 1)$

التابع لغارتمي نقاطه الشاذة هي نقاط تفرع تتعين من:

$$z^2 - 3z + 1 = 0$$

$$Z_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$W`_2 = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 1}$$

(3) $W_3 = \left(\frac{z + 2}{z + 1}\right)^{\frac{1}{4}}$

التابع كسري جذري له النقاط التالية هي نقاط تفرع.

$$z + 2 = 0 \qquad z = -2$$

$$z + 1 = 0 \qquad z = -1$$

والتابع المشتق هو:

$$W`_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{z + 2}{z + 1}\right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{z + 1 - z - 2}{(z + 1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{-1}{(z+1)^2} \left(\frac{z+2}{z+1} \right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$W`_3 = -\frac{(z+2)^{-\frac{3}{4}}}{(z+1)^{\frac{5}{4}}}$$

(4) $W_4 = \frac{Cosz}{z^2}$

تابع كسري جبري بسيط فيه $z = 0$ نقطة شاذة.

$$W`_4 = \frac{-z^2 Sinz - 2zCosz}{z^4}$$

$$W`_4 = \frac{-zSinz - 2Cosz}{z^3}$$

(5) $W_5 = th^{-1} 3z$

تابع قطعي معاكس نبدل كل *3z* بـ*z*

$$W_5 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+3z}{1-3z}$$

النقاط الشاذة (تفرع) هي:

Z=-1/3, Z=+1/3

$$W`_5 = \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{1+3z}{1-3z} \right)`}{\frac{1+3z}{1-3z}}$$

$$W`_5 = \frac{1}{2} \quad \frac{\frac{3(1-3z)+z(1+3z)}{(1-3z)^2}}{\frac{1+3z}{1-3z}}$$

$$W`_5 = \frac{1}{2} \quad \frac{6+0}{(1+3z)(1-3z)}$$

$$W`_5 = \frac{1}{2} \; \frac{6}{1-9z^2}$$

مثال 2:

برهن أن $Chz = u + iv$ تحليلي دوماً واستنتج من ذلك أن كلاً من v,u توافقيان:

$$Chz = ch(z+iy) = ChxChiy + ShxShiy \quad = ChxCosy + iShxSiny$$

$$U = Chx\ Cosy \qquad\qquad V = Shx\ Siny$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = ShxCosy = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -SinyChx = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

التابع تحليلي لتحقق شروط كوشي ريمن.

إن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

أي كلاً من v,u توافقيان.

مثال 3:

بفرض $r \neq 0$ برهن أن التابعين الحقيقيين:

$$U = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos\theta \qquad v = \left(r - \frac{1}{r} \right) Sin\theta$$

هما الجزءان الحقيقي والوهمي للتابع العقدي التحليلي دوماً.

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u + iv$$

ثم أوجد $f(z)$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) Cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(1 - \frac{1}{r} \right) Sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) Sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \left(r - \frac{1}{r} \right) Cos\theta$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$$

وبالتالي فهما يحققان شروط كوشي ريمن ولهذا يكون التابع:

$$f(re^{i\theta}) = u + iv$$

تحليلياً.

لتعيين $f(z)$ يكفي استبدال θ بـ0 و r بـz فنجد:

$$f(z) = \left[\left(r + \frac{i}{r}\right)Cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)Sin\theta\right]$$

$$r = z$$
$$\theta = 0$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

مثال (4):

برهن أن التوابع التالية ليست تحليلية:

أ) $W_1 = Cosy - iSiny$

ب) $W_2 = x^2 - iy^2$

(أ) نلاحظ $u = Cosy$ $\quad v = Siny$

$\frac{du}{dr} = 0 \neq \frac{dv}{dy} = -Cosy$ التابع ليس تحليلياً

(ب) نلاحظ $v = -y^2$ $\quad u = x^2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \neq \quad \frac{\partial 0}{\partial y} = -2y$ التابع ليس تحليلياً

مثال 5:

أوجد جذور المعادلات التالية:

(أ) $e^{4z}=1$ (ب) $e^{6z}=i$

(ج) $Chz=i$ (د) $Shz=i$

الحل:

(أ) $e^{4z}=1 \Rightarrow 4z=0 \quad z=0$

(ب) $e^{6z}=i=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$

$$6z=i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

$$z=\frac{i}{6}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

(ج) $Chz=i=\frac{e^{(z)}+e^{-(z)}}{2}$

$$e^{z}+e^{-z}=2i$$

$$e^{2z}-2i\,e^{z}+1=0$$

$$\Delta=(-2i)^2-4(1)(1)=-8$$

$$e^{z}=\frac{2i+2i\sqrt{2}}{2}=i(1+\sqrt{2})$$

$$z = \ln i + \ln(1+\sqrt{2})$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$e^{z} = \frac{2i - 2i\sqrt{2}}{2} = i(1-\sqrt{2})$$

$$e^{z} = i(1-\sqrt{2})$$

$$z = \ln(1-\sqrt{2}) + i \leq \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

(د) $Shz = i = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$$e^{z} - e^{-z} = 2i$$

$$e^{2z} - 2ie^{z} - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(1)(-1) = 0$$

$$e^{z} = \frac{2i}{2} = i$$

$$z = \ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

مثال 6:

أوجد التابع التحليلي دوماً $f(z)$ والمحقق للشرطين التاليين:

$$\operatorname{Re}\left[f`(z)\right] = 3x^2 - 4y - 3y^2$$

$$f(1+i) = 0$$

الحل:

لدينا $f`(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

القسم الحقيقي للمشتق هو $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2$$

$$U(x,y)=x^3-4xy-3^2x+C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4x-6xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2$$

$$v(x,y)=3x^2y-2y^2-y^3+\psi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+\psi`(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$6xy+\psi`(x)=4x+6xy$$

$$\psi`(x)=4x \qquad \psi(x)=2x^2+C$$

$$V=3x^2y-2y^2-y^3+2x^2+C$$

$$f(x,y)=u+iv=x^3-4xy-3y^2x+C_1$$

$$+i(3x^2y-2y^2-y^3+2x^2+C_1$$

لإيجاد $f(z)$ نضع $x=z$ و $y=0$

$f(z) = z^3 + i2z^2 + iC$

لإيجاد الثابت نعوض $f(1+i) = 0$

$f(1+i) = (1+i)^3 + 2i(1+i)^2 + iC_b + C_1$

$1 - i + 3i - 3 + 2i(1 - 1 + 2i) + iC + C_1 = 0$

$-2 + 2i - 4 + iC + C_1 = 0$

$-6 + C_1 + i(2 + C) = 0$

$C_1 = 6 \qquad C = -2$

$f(z) = z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i$

تمارين إضافية (1 – 2 –13)Supplementary Problems

1 . بفرض $Z_1 = 2+3i$, $Z_2 = 1-i$

أوجد التابع $W = Z^2$ في كلا الحالتين السابقتين.

2 . لنعرف نقطة التفرع لتابع $f(z)$ كما يلي:

نقول عن Z_0 إنها نقطة تفرع للتابع $W = f(z)$ عندما يتحقق ما يلي:

لنحِط Z_0 بمنحنٍ مغلق، وإذا تجولنا حول Z_0 على المنحني وغيّر التابع $W = f(z)$ قيمته فنسمي Z_0 نقطة تفرع.

برهن اعتماداً على التعريف أن التابع:

$$f(z) = \sqrt{z^2+1}$$

له نقطتا تفرع هما $z = \pm i$

3 . كرر نفس السؤال السابق بالنسبة للتابع:

$$W = f(z) = \ln z$$

4 . بفرض $|b| < L$ برهن عندما:

أ . $$1 + bCos\theta + b^2Cos2\theta + ... + ... = \frac{1}{1-2bCos\theta + b^2}$$

ب . $$bSin\theta + b^2Sin2\theta + ... = \frac{bSin\theta}{1-2bCos\theta + b^2}$$

ملاحظة:

☜ انتبه $1+be^{i\theta}+b^2\ e^{2i\theta}+..........=\dfrac{1}{1-be^{i\theta}}$

5 . احسب $Z=\ln\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

6 . برهن أن:

$$\text{Re}\left(\frac{1+itg\frac{\theta}{2}}{1-itg\frac{\theta}{2}}\right)=Cos\theta$$

7 . برهن أن التابع:

$$U=e^{-x}(xSiny-yCosy)$$

توافقي أوجد التابع v الموافق لـ u حتى يكون $f(z)=u+iv$ تحليلياً.

8 . عين نوع النقاط الشاذة للتوابع التالية:

$$W_1=\frac{z}{(z^2+9)^2}\quad,\quad W_2=\frac{z(z-1)}{(z^2-1)}$$

9 . برهن على صحة نظرية كوشي ريمن للتابع التحليلي في الإحداثيات القطبية أي:

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

10 . اعتماداً على مفهوم الأعداد العقدية المترافقة،حل المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=x^2-y^2$$

. مثال هام:

برهن على صحة ما يلي $|b|<1$

أ . $$1+b\cos\theta+b^2\cos 2\theta+..........+.........=\frac{1}{1-2b\cos\theta+b^2}$$

ب . $$bSin\theta+b^2Sin2\theta+..........+..........=\frac{bSin\theta}{1-2\cos\theta+b^2}$$

بفرض $z=be^{i\theta}$ وبفرض $|z|=|b|<1$

$$1+be^{i\theta}+b^2e^{2i\theta}+.........=\frac{1}{1-be^{i\theta}}$$

لأن المجموع هو سلسلة هندسية أساسها $be^{i\theta}$ حيث $|be^{i\theta}|<1$

أي:

$$(1+bCos\theta+b^2\cos 2\theta+......)+i(bSin\theta+b^2Sin2\theta+.........)=$$

$$\frac{1}{1-be^{i\theta}}=\frac{1}{1-be^{i\theta}}\,\frac{1-be^{-i\theta}}{1-be^{-i\theta}}$$

$$=\frac{1-b(Cos\theta-iSin\theta)}{1-b(e^{i\theta}-be^{i\theta})+b^2}$$

$$=\frac{1-b\cos\theta+ib\sin\theta}{1-2bCos\theta+b^2}$$

$$=\frac{1-bCos\theta}{1-2bCos+b^2}+i\frac{bSin\theta}{1-2bCos\theta+b^2}$$

بمطابقة القسمين الحقيقي والوهمي بين الطرفين نحصل على المطلوب.

مثال نموذج:

برهن أن: $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1+itg\dfrac{\theta}{2}}{1-itg\dfrac{\theta}{2}}\right)=Cos\theta$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(1+itg\frac{\theta}{2})^2}{1+tg^2\frac{\theta}{2}}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+tg^2\frac{\theta}{2}+2+itg\frac{\theta}{2}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left(\cos^2(1+tg^2\frac{\theta}{2})+wi\cos^2\frac{\theta}{2}.tg\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-Sin^2\frac{\theta}{2}+2iSin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\operatorname{Re}(\cos\theta+iSin\theta)=\cos\theta$$

الفصل الثالث

التكاملات العقدية ونظرية كوشي

وصيغ كوشي التكاملية

Complex integration and Cauchy's Theorem and formulas

(1 . 3 . 1): التكامل الخطي العددي:

رأينا في الفصل السابق أن التابع العقدي يتألف من جزءين $v=(x,y), u=(x,y)$ وهما حقيقيان، سوف ندرس بعض التوابع العقدية ذات المتحولات العقدية أو الحقيقية مثل:

$$W_1 f(z) = Shz + z^2 - ichz$$

وهو تابع عقدي لمتحول عقدي:

$$W_1 = f(z) = t^2 + t + 1 + i\sin t = u(t) + iv(t)$$

وهو تابع عقدي لمتحول حقيقي.

ففي الحالة الأولى يكون z متحولاً على نطاق في الحالة العامة وهذا النطاق عقدي، أما في الحالة الثانية فإن المتحول t حقيقي وهو يتحول على نطاق حقيقي (مجال حقيقي).

ويعرف التكامل في الحالة الثانية على فترة (a,b) كما يلي:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b [u(t) + iv(t)]dt$$

وبسهولة نرى أن خواص التكاملات المحددة الأساسية الحقيقية محققة على هذه التكاملات.

يعرف التكامل العقدي كما يلي:

ليكن γ منحنياً مستمراً محدوداً وصقيلاً (أملساً) مستوياً موجهاً أو صقيلاً جزئياً ولنفرض:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

تابعاً عقدياً مستمراً على γ ، إن التكامل الخطي العقدي على γ بالتعريف هو التكامل:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} [u(x,y) + iv(x,y)]d(x+iy)$$

$$= \int_{\gamma} udx - vdy + i\int udy + vdx$$

وهو كما نرى مؤلف من أربعة تكاملات حقيقية وشرط وجود التكامل العقدي هو وجود هذه التكاملات.

يمكن لهذا المنحني γ أن يكون مفتوحاً أو مغلقاً وسوف نرمز للتكامل المغلق كما يلي:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz$$

ونعد الاتجاه موجباً الاتجاه الموجه عكس عقارب الساعة، نسمي γ مسار هذا التكامل ويلاحظ أن قيمة التكامل مرتبطة بالمسار،وسوف نرى لاحقاً حالات يكون فيها التكامل مستقلاً عن المسار.

إن خواص التكاملات العقدية هي نفسها خواص التكاملات الخطية مضافاً لذلك أن المسار لا يمكن أن يمر بأية نقطة شاذة أو يقطع مستقيم تفرع للتابع العقدي $f(z)$ ؛ لأن التابع غير مستمر على هذه النقاط، لنذكر أهم هذه الخواص:

1. $A\int_{\gamma} f(z)dz = A\int_{\gamma 1} f(z)dz + A\int_{\gamma 2} f(z)dz$ حيث $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

2. $\int_{\gamma}[f(z) \pm g(z)]dz = \int_{\gamma} f(z)dz \pm \int_{\gamma} g(z)dz$

حيث $f(z), g(z)$ تابعان مستمران على γ.

3. $\int_{ab} f(z)dz = -\int_{ba} f(z)dz$

4. $\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq L.M$

حيث L طول المسار و $M \geq |f(z)|$ مهما تكن Z.

(1 . 3 . 2): حساب التكاملات العقدية على منحنٍ:

لقد وجدنا أن التكامل العقدي $\int_{\gamma} f(z)dz$ عبارة عن مجموع تكاملات حقيقية بمتحولين أو متحول واحد، وفي الحالة العامة يمكن حساب هذا التكامل بالاستعانة بمعادلة المنحني γ حيث نستبدل أحد المتحولين x أو y بالآخر بوساطة معادلة المنحني، ويتحول التكامل إلى تكامل بمتحول واحد تحدد قيمته من معادلة المنحني (بالاستعانة بمعادلة المنحني).

مثال ذلك التكامل:

$$I = \int_{\gamma} z^2 dz$$

حيث γ الدائرة $|z| = 1$ فنجد:

$$z = e^{i\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} ie^{2i\theta} ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3i} e^{i3\theta}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{i6\pi\theta} - 1}{3i}$$

$$= \frac{Cos6\pi + iSin6\pi - 1}{3i} = 0$$

(1 . 3 . 3): نظرية كوشي التكاملية:

تمهيد: لتكن $\overline{D}$ منطقة بسيطة الاتصال (لا يوجد نقاط مضاعفة) أي أنه يمكن وصل أي نقطتين من المنطقة $\overline{D}$ بمنحنٍ مستمر يقع في $\overline{D}$ وليكن Γ منحنياً مستمراً صقيلاً أو صقيلاً جزئياً عند ذلك.

نظرية كوشي التكاملية:

إذا كان $f(z)$ تابعاً عقدياً تحليلياً على المنطقة $\overline{D}$ البسيطة الاتصال والتي يحيط بها المنحني المستمر المغلق والموجه والصقيل أو الصقيل جزئياً Γ فإن:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

سوف نبرهن على هذه النظرية مفترضين أن $f`(z)$ مستمر أيضاً مع إمكانية البرهان عليها دون هذا الشرط (حيث برهن عليها العالم غورسان).

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma}[u(x,y) + iv(x,y)]d(x,+iy)$$

$$= \oint_{\Gamma} udx - vdy + i\oint_{\Gamma} udy + vdx$$

وحيث إن أحد أشكال المشتق $f`(z)$ هو:

$$f`(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

نجد أن هذه المشتقات مستمرة لكون $f`(z)$ كذلك ؛ لهذا يمكن تطبيق نظرية غرين في المستوي على التكاملين الخطيين الحقيقيين السابقين فنجد:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=\iint_{\overline{D}}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

وحيث إن $f(z)$ تابع تحليلي لهذا فهو يحقق شروط كوشي ريمن أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي فإن كلاً من التكاملين السابقين معدوم أي:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=0$$

نتيجة:

إذا كان Γ_1 منحني موجه وصقيل داخل $\overline{D}$ التي يحدها Γ عندها:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=\oint_{\Gamma_1} f(z)dz$$

كما يمكن تعميم ذلك على عدة منحنيات $\Gamma_1........\Gamma_n$ واقعة داخل $\overline{D}$ فنجد:

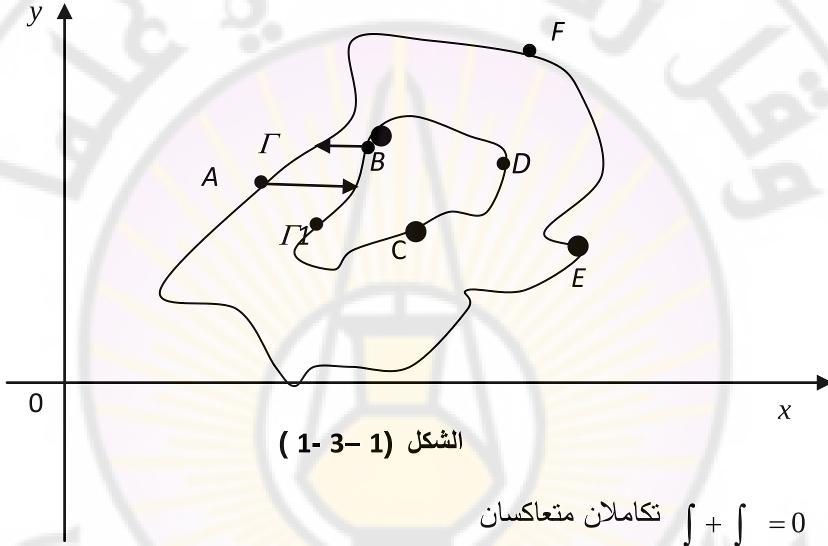
$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=\oint_{\Gamma_1} f(z)dz+........+\oint_{\Gamma_n} f(z)dz$$

من أجل البرهان نصل نقطة من Γ مثل A بنقطة من Γ_1 مثل B فنجد حسب كوشي:

$$\oint_{\overline{ABcdBAEFA}} f(z)dz=0$$

أي:

$$\oint_{AB} fdz + \oint_{BCdB} fdz + \oint_{BA} f(z)dz + \oint_{AEFA} f(z)dz = 0$$



الشكل (1 –3 -1)

لكن $\int_{AB} + \int_{BA} = 0$ تكاملان متعاكسان

أي:

$$\int_{BcdB} f(z)dz = -\int_{AEFA} f(z)dz$$

$$\int_{\overline{BdcB}} f(z)dz = \int_{\overline{AEFA}} f(z)dz$$

$$\oint_{\Gamma_1} fdz = \oint_{\Gamma} f(z)dz$$

يمكن برهان التعميم بنفس الطريقة.

(1 . 3 . 4): استقلال التكامل عن الطريق (المسار):

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي على $\overline{D}$ التي يحيط بها المنحني المغلق Γ . لنفرض أن $\overline{\Gamma_1} = ABCDA$ منحنٍ آخر يقع بكامله في $\overline{D}$ عندها:

$$\int_{ABC} f(z)dz = F(C) - F(A)$$

حيث $F(z)$ التابع الأصلي لـ $f(z)$

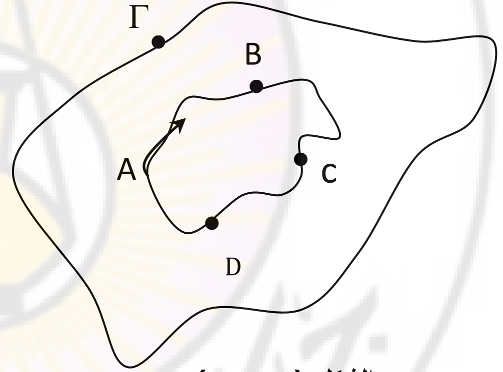
حسب نظرية كوشي ونتيجتها السابقة فإن Γ_1, Γ متكافئان أي:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = 0$$

$$\oint_{\Gamma 1} fdz = \int_{ABCDA} f(z)dz = 0$$

$$\int_{ABC} f(z)dz + \int_{CDA} f(z)dz = 0$$

$$\int_{ABC} f(z)dz = -\int_{CDA} f(z)dz = \int_{ADC} f(z)dz$$



الشكل (1 -3 -2)

أي التكامل لا يتعلق بالمسار بل بقيمة التابع في A وقيمته في C .

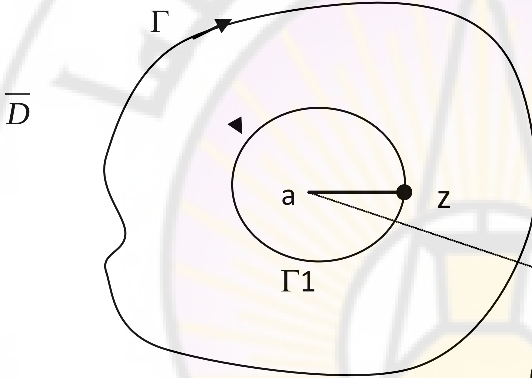
(1 . 3 . 5): صيغ كوشي التكاملية:

نظرية (مبرهنة):

إذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً على $\overline{D}$ التي يحيط بها Γ الموجه والمغلق والمستمر وكانت a نقطة داخلية من $\overline{D}$ عندها تصح العلاقتان التاليتان:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$



الشكل (1 -3 -3)

البرهان:

إن التابع $\frac{f(z)}{z-a}$ غير تحليلي فقط عند $z=a$ ؛ لهذا نحيط a بجوار نصف قطره ε بحيث Γ_1

$$|z-a|=\varepsilon \Rightarrow z-a=\varepsilon e^{i\theta}$$

$$z=a+\varepsilon e^{i\theta}$$

$$dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$

إن التابع $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلي على $\overline{D}_1$ حيث $\overline{D_1}$ المنطقة بين Γ_1,Γ ، وبالتالي:

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{\Gamma 1}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

لأن Γ,Γ_1 متكافئان لكن:

$$\oint_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon\, e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

لنأخذ نهاية الطرفين عندما $\varepsilon\to 0$ أي المنطقة $\overline{D_1}$ تنتهي إلى D عندها:

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz=i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}f\left[\lim_{\varepsilon\to 0}(a+\varepsilon e^{i\theta})\right]d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}f(a)d\theta=2\pi i f(a)$$

ومنه:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

بما أن النقطة $z=a$ داخلية اختيارية في D لهذا يمكن اعتبارها متحولة والاشتقاق بالنسبة لـ a فنجد:

$$f`(a) = \oint_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

لأن z ثابت بالنسبة لـ a نكرر ذلك لنجد أن:

$$f``(a) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

$$f```(a) = \frac{3i2}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{3+1}} dz$$

$$f^{`(4)}(a) = \frac{4.3.2.1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{4+1}} dz$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

تمارين محلولة (1 – 3 – 6) Solved Problems

مثال 1:

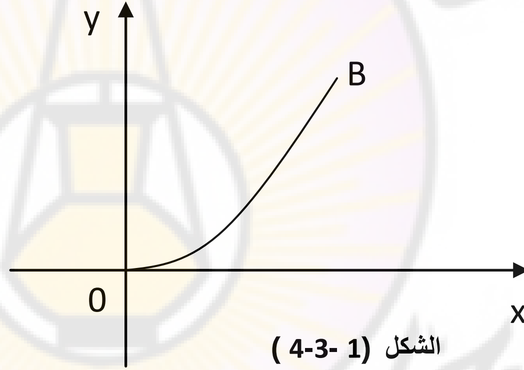
احسب التكامل $I=\int_{\Gamma} z^3 dz$ حيث Γ قوس من القطع المكافئ $y=2x^2$ والذي يصل بين النقطتين $O(0,0)$, $B(1,2)$.

الحل:

التابع المستكمل تحليلي لهذا لا يتعلق التكامل بالمسار ويمكن كتابة:

$$I=\int_{OB} z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big|_0^B$$

$$=\frac{(1+2i)^4}{4}=-\frac{7}{4}-6i$$



الشكل (1 -3-4)

يمكن حل المسألة السابقة بالاستعانة بمعادلة المنحني $y=2x^2$ نستبدل $z=x+iy$ ثم نكتب:

$$dz=dx+idy \quad , \quad z=x+2x^2 i$$

ونحول التكامل العقدي إلى تكاملات حقيقية آخذين بعين الاعتبار تحول x من *0* إلى *1* نحصل على نفس النتيجة السابقة.

مثال 2:

احسب التكامل $I=\int_{\Gamma} z^2 dz$ حيث Γ المنحني الوسيطي $y=t^2, x=t$

$0 \le t \le 2$

أي $z=x+iy$

$$z=t+it^2 \Rightarrow dz=(1+2it)dt$$

$$I=\int_0^2 (t+it^2)(1+2it)dt$$

$$=\int_0^2 (t^2-t^4+2it^3)(1+2it)dt$$

$$=\int_0^2 (t^2-t^4+2it^3-2it^5-4t^4)dt$$

$$=\int_0^2 (t^2-t^4-4t^4)dt+i\int_0^1 (4t^3-t^5)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{5}{6}t^5+it^4-i\frac{t^6}{6}\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{160}{6}+i(16)-i\left(\frac{64}{4}\right)$$

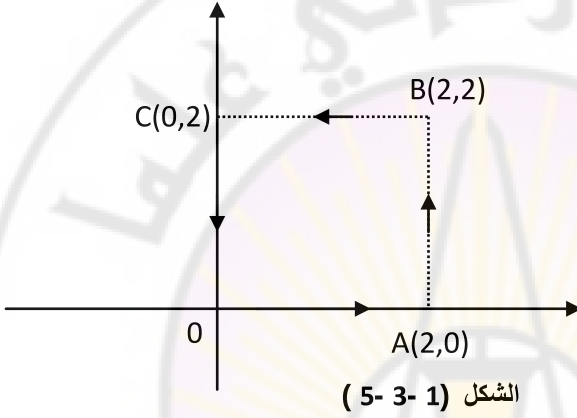
$$=-\frac{72}{3}-\frac{72}{6}i=-24-12i$$

مثال 3:

ليكن Γ مربعاً موجهاً عكس عقارب الساعة رؤوسه هي النقاط $(0,2)\,,(2,0)\,,(2,2)\,,(0,0)$ احسب قيمة التكاملات.

أ . $\oint_{\Gamma} \left| z^2 \right| dz$

ب . $\oint_{\Gamma} chz\, dz$



الشكل (1 -3 -5)

الحل:

أ . إن التكامل هو التالي:

$$I = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2)(dx + idy)$$

$$= \int_{\Gamma} x^2 dx - y^2 dy + i \int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$$

يجب التمييز على كل ضلع من أضلاع المربع قيمة z فنجد على:

$$OA \rightarrow z = x \quad dx = dz \quad 0 = x \rightarrow x = 2$$

على

$$AB \rightarrow z = 2 + iy \quad 0 \leq y \leq 2$$

على

$$BC \to z = x + 2i \quad x = 2 \to x = 0$$

على

$$CO \to z = iy \quad 2 = y \to y = 0$$

$$I = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$I_{AB} = \int_0^2 (4 - y^2)(idy) = i\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

$$= i\left(8 - \frac{8}{3}\right) = i\frac{16}{3}$$

$$I_{BC} = \int_2^0 (x^2 + 4)(dx) = \frac{x^3}{3} + 4x\Big|_2^0$$

$$= -\frac{8}{3} - 8 = -\frac{32}{3}$$

$$I_{CO} = \int_2^0 iy^2 dy = i\frac{y^3}{3}\Big|_2^0 = -\frac{8}{3}i$$

$$I = I_{OA} + I_{AB} + I_{BC} + I_{CO}$$

$$= \frac{8}{3} + i\frac{16}{3} - \frac{32}{3} - \frac{8}{3}i$$

$$= -8 + \frac{8}{3}i$$

ب . التابع المستكمل تحليلي على Γ لهذا:

$$I = \int_{\Gamma} Chzdz = 0$$

مثال 4:

احسب قيمة التكاملات التالية:

1. $I_1 = \oint_{|z|=2} \frac{Sin2z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz$

2. $I_2 = \oint_{|z|=1} \frac{Cos^4 z}{z - \frac{\pi}{6}} dz$

3. $I_3 = \oint_{|z+1-i|} \frac{z+4}{z^2 + 2z + 5} dz$

الحل:

من ملاحظة صيغة كوشي الثانية:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

وبالموازنة نجد:

$$n+1 = 2 \quad n = 1 \quad f(z) = Sin2z$$

$$a = \frac{\pi}{2} \in |z| < 2$$

لهذا نطبق هذه الصيغة فنجد:

$$\oint_{|z|=2} \frac{Sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) = 2\pi i [Sin2z]^{1}$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{Sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} dz = 2\pi i \left(2Cos2\frac{\pi}{2}\right) = -4\pi i$$

2 . بمقارنة صيغة كوشي الأولى:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

نجد:

$$n+1=1 \quad n=0$$

$$f(z) = \cos^4 z \qquad a = \frac{\pi}{6} \in |z| < 1$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{Cos^4 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)} dz = 2\pi i \left(Cos^4 z\right)_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{9\pi}{8} i$$

3 . بالنظر لصيغ كوشي مباشرة نجد عدم وجود تشابه ؛ لأن المقام من الدرجة الثانية (حدودية من الدرجة الثانية) أما المنطقة فهي الدائرة:

$$|z-(-1+i)| = 2$$

ذات المركز $(-1+i)$ ونصف القطر 2، ثم نفرق الكسر حتى تتطبق صيغ كوشي أو نتبع ما يلي:

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(5) = -16$$

$$z_1 = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i$$

$$z_2 = -1 + 2i$$

نلاحظ أن z_1 تقع خارج الدائرة $|z-(-1+i)| = 2$ لهذا نكتب التكامل كما يلي:

$$I_3 = \int_{|z-(-1+i)|=2} \frac{\frac{z+4}{z-z_1}}{z-z_2}\, dz$$

بالموازنة مع صيغة كوشي الأولى نجد:

$$f(z) = \frac{z+4}{z-z_1} = \frac{z+4}{z+1+2i}$$

$$n+1 = 1 \qquad n = 0$$

$$a = z_2 = -1 + 2i$$

$$I_3 = 2\pi i\left(\frac{z2+4}{z2+1+2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{-1+2i+4}{-1+2i+1+2i}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3+2i}{4!}\right) = \frac{\pi}{2}(3+2i)$$

مثال 5:

احسب التكامل $I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ حيث Γ القطع الناقص $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ والموجه عكس عقارب الساعة، إن النقطة الشاذة الوحيدة الواقعة داخل القطع هي $z = 0$ لهذا تكون التكاملات على كل المنحنيات الحاوية لـ $z = 0$ والواقعة داخل القطع متكافئة ؛ لهذا نختار Γ_1 دائرة مركزها *O*

ونصف قطرها اختياري بحيث تقع داخل Γ ولهذا يكون التابع $\frac{1}{z}$ تحليلي على المنطقة الواقعة بين Γ_1, Γ وهما بالتالي منحنيان متكافئان:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

حسب صيغة كوشي.

مثال 6:

احسب التكامل:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{9z^2 - iz + 4}{z(z^2 + 4)}\, dz$$

حيث $\Gamma : |z| = 4$

نلاحظ أنه لا يمكن تطبيق صيغ كوشي مباشرة لهذا نعمد إلى تفريق الكسر فنجد:

$$\frac{9z^2 - iz + 4}{z(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{z} + \frac{\frac{37}{4}}{z+2i} + \frac{\frac{15}{2}}{z-2i}$$

$$I = \int_{|z|=4} \frac{dz}{z} + \frac{17}{4} \int_{|z|=4} \frac{dz}{z+2i} + \frac{15}{2} \int_{|z|=4} \frac{dz}{z-2i}$$

وحسب صيغ كوشي نجد:

$$= 2\pi i(1) + \frac{17}{4}(2\pi i)(1) + \frac{15}{2}(2\pi i)(1)$$

$$= 2\pi i\left[1 + \frac{17}{4} + \frac{15*2}{4}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{4+17+30}{4}\right]$$

$$= 2\pi i\frac{(51)}{4} = \frac{51}{2}\pi i$$



تمارين إضافية (1 – 3 – 7) ***Supplementary Problem***

1 . ليكن $W = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ تابعاً عقدياً عين مشتق هذا التابع $\frac{dw}{dz}$ وحدد أين يكون هذا التابع غير تحليلي.

2 . تحقق من صحة كوشي في التوابع التحليلية من أجل التابع $f(z) = e^z$ والمنطقة $|z| = 1$

3 . إذا كان $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ منحنياً Γ يصل النقطتين $B(2,3), A(1,1)$

احسب التكامل:

$$\int_{\Gamma} (12z^2 - 41z)\, dz$$

4 . احسب التكامل:

$$I_1 \int Cot(2z+5)dz \quad , \qquad I_2 = \int Sin3zCos3z\, dz$$

5 . حقل قوة مغناطيسية $\vec{F} = 3z + 5$ أوجد عمل هذه القوة من أجل الانتقال لجسم ما في هذا الحقل عندما ينتقل من النقطة الموافقة لـ $z = 0$ إلى $z = 4 + 2i$ على منحني Γ حيث

$$\Gamma : z = t^2 + it$$

الجواب: 50.

6 . احسب التكامل:

$$I = \oint_{\Gamma} (x + 2y)dx + (y - 2x)dy$$

حيث Γ المنحني المعرف بـ $x = 4\cos\theta, y = 3Sin\theta$

حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ الدوران عكس عقارب الساعة.

7 . احسب التكامل $I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z)dz$ حيث Γ هو المنحني $|z| = 2$ من النقطة $A(2,0)$ إلى النقطة $B(0,2)$.

8 . احسب التكامل:

$$I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z)dz \quad \Gamma : x = a(\theta - Sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

من النقطة الموافقة لـ $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$

الجواب: $\dfrac{6\pi^5 a^5 + 80\pi^3 a^3 + 30\pi a}{15}$

9 . احسب التكامل:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-2}$$

حيث $\Gamma : |z-2| = 4$ أو $\Gamma : |z-1| = 5$

الجواب: $2\pi i$

10 . احسب التكامل $I = \oint_{\Gamma} \dfrac{dz}{z-3}$ حيث $\Gamma : |z-2| = 5$

هل النتيجة تعارض نظرية كوشي؟

11 . احسب التكامل $I = \oint_{\Gamma} e^z dz$ حيث $\Gamma : |z| = 1$ ثم برهن أن:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + Sin\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} Sin(\theta + Sin\theta) d\theta = 0$$

12 . أوضح بشكل مباشر أن قيمة التكامل:

$$I = \int_{3+4i}^{4-3i} (6z^2 + 8iz)\, dz$$

لا تتغير على المنحني Γ الذي يصل النقطة $3+4i$ بالنقطة $4-3i$ في حال كون Γ هو:

أ . المستقيم الواصل بينهما.

ب . أو المستقيم الواصل من $3+4i$ إلى $4+4i$ ثم من $4+4i$ إلى $4-3i$.

ج . الدائرة $|z| = 5$.

احسب هذه القيمة.

الجواب: $238 - 266i$

13 . احسب التكامل:

$$I = \oint_\Gamma \frac{Sin\pi z^2 + Cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\, dz$$

حيث $\Gamma : |z| = 3$

الجواب: $4\pi i$

14 . احسب التكامل:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz \quad \Gamma : |z| = 3$$

الجواب: $\frac{8\pi i e^{-2}}{3}$

15 . احسب التكاملات الآتية:

حيث Γ هو $|z| = 5$ $\quad I_1 = \oint_{\Gamma} \frac{Sin3z}{z+z} dz$

$$I_2 = \oint_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz$$

t وسيط.



الفصل الرابع

السلاسل العقدية غير المنتهية

وسلاسل تايلور ولورانت

Infinite Complex Series and Taylor’s and Laurent's Series

تمهيد:

من دراستنا للتحليل الحقيقي وجدنا أن أي تطبيق لمجموعة من الأعداد الطبيعية على مجموعة أخرى يسمى متتالية (متوالية)، كذلك الأمر هنا في الساحة العقدية فإن أي تطبيق لمجموعة من الأعداد الطبيعية على مجموعة عقدية يسمى متتالية عقدية حيث نكتب مثلاً:

$$\{Z_n\} = Z_1, Z_2, \dots\dots, Z_n, \dots\dots$$

وهي متتالية لا نهائية وكل حد منها يسمى حداً للمتتالية. نسمي Z_n الحد العام. مثلاً المتتالية:

$$\left\{2 + \frac{i}{n+1}\right\} = 2 + \frac{i}{2}, 2 + \frac{i}{3}, \dots\dots\dots\dots$$

حيث $2 + \frac{i}{n+1}$ الحد العام للمتتالية.

إذا وضعنا $Z_n = x_n + iy_n$ نجد أن دراسة المتوالية (المتتالية) $\{Z_n\}$ تؤول إلى دراسة المتوالية $\{X_n\}$ والمتتالية $\{Y_n\}$.

(1.4.1): تعريف:

نقول إن $\{Z_n\}$ متقاربة من Z_0 إذا تحقق:

$$\forall \quad \varepsilon > 0, \quad \exists \quad N(\varepsilon): \quad |Z_n - Z_0| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

بسهولة ومن خلال التعريف نجد:

(2.4.1): مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لتكون $\{Zn\}$ حيث $Z_n = x_n + iy_n$ متقاربة من $Z_0 = x_0 + iy_0$ هو تحقق أن $y_n \to y_0 \quad , \quad x_n \to x_0$

تطبيق:

المتتالية $Z_n = \frac{4n-1}{n} + i\frac{n+7}{n-2}$ متقاربة لأن:

$$x_n = \frac{4n-1}{n} \to 4$$

$$y_n = \frac{n-7}{n-2} \to 1$$

ولهذا

$$Z_n \to 4 + i$$

(3. 4.1): تعريف:

نقول عن متتالية $\{Z_n\}$ إنها متتالية كوشي إذا كانت تحقق ما يلي:

مهما يكن العدد $0 < \varepsilon$ يمكن تعين العدد الصحيح $N(\varepsilon)$ بحيث:

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| Z_{n+p} - Z_n \right| < \varepsilon$$

حيث p أي عدد طبيعي.

ونقول إن المتتالية (متوالية) $\{Z_n\}$ محدودة إذا كان $|Z_n| \le M$ حيث M عدد حقيقي ثابت.

(1 .4 .4): السلاسل العقدية:

بفرض $\{Z_n\}$ متتالية عقدية حيث $Z_n = x_n + iy_n$ ، عندئذ نسمي المجموع اللانهائي:

$$Z_1 + Z_2 + \dots\dots + Z_n + \dots\dots$$

سلسلة عقدية، ونرمز لذلك بـ $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ كما نسمي $S_n = Z_1 + Z_2 + \dots\dots + Z_n$ المجموع النوني للسلسلة.

(1 . 4 . 5): تعريف:

إذا كانت المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة من S فإننا بالتعريف نقول إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ متقاربة ونكتب تجاوزاً $S = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ ، أما إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة عندها نقول إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ متباعدة (يمكن تسمية السلسلة التي مجموعها لا نهاية أنها سلسلة متقاربة من الانهاية).

يمكننا تطبيق معايير التقارب المعروفة في الساحة الحقيقية على السلاسل العقدية، فمثلاً تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ حسب معيار كوشي إذا تحقق ما يلي:

من أجل أي $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين $N(\varepsilon)$ صحيح، بكلام آخر، من أجل أي عدد طبيعي p و $n > N(\varepsilon)$ يكون لدينا $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ ، فإذا كانت $p = 1$ نحصل على الشرط اللازم لتقارب السلاسل (كما في الساحة الحقيقية) وهو:

$$\lim_{n \leftarrow \infty} |S_{n+1} - S_n| = \lim_{n \to \infty} Z_n = 0$$

ولكن قد ينتهي الحد العام إلى الصفر دون أن تكون السلسلة متقاربة (مثل السلسلة $\sum_p^{\infty} \frac{1+i}{n}$).

(1 . 4 . 6): تعريف:

نقول إن السلسلة $\sum_n^{\infty} Z_n$ متقاربة مطلقاً أو إطلاقاً إذا كانت $\sum_n^{\infty} |Z_n|$ متقاربة، أما إذا كانت $\sum_n^{\infty} |Z_n|$ متباعدة و $\sum^{\infty} Z_n$ متقاربة فإننا نسمي التقارب شرطياً.

نلاحظ أن $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متقاربة، أما $\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right|$ فهي متباعدة وبالتالي $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متقاربة شرطياً.

بسهولة نرى أن التقارب المطلق للسلسلة $\sum_n^{\infty} Z_n$ يكافئ تقارب السلسلتين:

$$\sum_n^{\infty} |Y_n| \quad , \quad \sum_n^{\infty} |X_n|$$

حيث $Z_n = X_n + iY_n$

من المفيد أن نشير إلى أن الكثير من خواص السلاسل الحقيقية المتقاربة مطلقاً هي صحيحة في الساحة العقدية مثل:

1 . تغير ترتيب حدود سلسلة متقاربة إطلاقاً لا يغير مجموع السلسلة.

2 . مجموع أو فرق أو جداء سلسلتين متقاربتين إطلاقاً هو سلسلة متقاربة إطلاقاً.

3 . إذا كانت $\sum_{n}^{\infty} U_n$ متقاربة وكان $|Z_n| \le |U_n|$ عندها $\sum_{n}^{\infty} Z_n$ متقاربة إطلاقاً.

مثل السلسلة $\sum_{n}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ متقاربة إطلاقاً ذلك لأن:

السلسلة $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة ولأن $\left|\frac{i^n}{n^2}\right| < \frac{1}{2n}$

4 . أما إذا كانت $\sum_{n}^{\infty} U_n$ متباعدة وكان $|Z_n| > |U_n|$ عندها $\sum^{\infty} |Z_n|$ متباعدة وقد تكون $\sum_{n}^{\infty} Z_n$ متقاربة شرطياً.

5 . اختبار دلامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{Z^{n+1}}{Z^n}\right| < 1$$

متقاربة والحالة المعاكسة متباعدة، وفي حالة النهاية 1 حالة شك.

مثال ذلك السلسلة $\sum_{n}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n+3}$ متباعدة.

6 . الاختبار النوني (كوشي):

تكون السلسلة $\sum_{n}^{\infty} Zn$ متقاربة عندما:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|Z_n|} = q < 1$$

وعندما $q > 1$ تكون السلسلة متباعدة وعندما $q = 1$ حالة شك.

مثال:

السلسلة $\sum_{n}^{\infty}\left(\frac{3-4i}{4}\right)$ متباعدة

7 . اختبار راب:

تكون السلسلة $\sum_{n}^{\infty} Z_n$ متقاربة مطلقاً عندما

$$\lim_{n\to\infty} n\left|\left(\frac{Z_n}{Z_{n+1}}-1\right)\right| = R > 1$$

(1−4−7): السلاسل العقدية التابعية:

عندما تكون حدود السلسلة العقدية توابع لمتحول عقدي *Z* نسمي السلسلة بسلسلة تابعية مثل:

$$\sum W_n(z) = W_1(z) + ... + W_n(z) + ...$$

نسمي $\{S_n(z)\}$ متوالية المجموعات الجزئية من السلسلة عندها نكتب:

$$S_n(z) = W_1(z) + ... + ... + W_n(z)$$

(1−4−8): تعريف:

نقول عن السلسلة التابعية $\sum_{n}^{\infty} W_n(z)$ إنها متقاربة بانتظام على *D* إلى التابع *W(z)* إذا كانت متوالية المجاميع الجزئية $\{S_n(z)\}$ متقاربة على *D*، أي من أجل أي $\varepsilon > 0$ يمكن تعيين $N(\varepsilon) \in N$

$$\left|S_n(z) - W(z)\right| < \varepsilon; \quad n > N(\varepsilon), Z \in D$$

(1−4−9): اختبار فليرشتراس:

تكون السلسلة $\sum_{n}^{\infty} W_n(z)$ متقاربة بانتظام على D وبشكل مطلق إذا كان:

$$|W_m(z)| \le m_n \qquad n = 1,2,3,.......$$

حيث m_n أعداد لا تتعلق بـ Z من D وكانت السلسلة $\sum_{1}^{\infty} m_n$ متقاربة.

ملاحظة : في التقارب بانتظام يمكن اشتقاق وتكامل حدود السلسلة حداً حداً ومن ثم اشتقاق المجموع أو تكامله، وإذا كانت حدود السلسلة توابع مستمرة كان مجموعها تابعاً مستمراً (والتباين ربما يكون في الأطراف).

سلاسل القوى:

(1 . 4 . 10): تعريف:

نسمي السلسلة $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ... + a_n(z-a)^n + ...$ بسلسلة قوى ونرمز لها بـ

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

مثل السلسلة $\sum_{0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n+3}$

نلاحظ أن سلسلة القوى دوماً لها نطاق تقارب وهو يتعين مثلاً من معيار دلامبير كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n (z-a)^{n+1}}{a_n (z-a)^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z-a|<1$$

$$|z-a|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R_n$$

أي أن هناك نصف قطر تقارب، فإذا كان R_n محدوداً عندها يكون هناك نطاق محدود مركزه $z=a$ هو نطاق التقارب وخارجه يكون نطاق التباعد، أما على المحيط فهناك حالة من الشك: قد تكون السلسلة الناتجة متقاربة أو متباعدة حسب الحالة.

وعندما يكون R_n غير محدود عندها تكون السلسلة متقاربة على المستوي Z كله، أما إذا كانت $R_n=0$ عندها تكون السلسلة متقاربة فقط عند $Z=a$.

(11 . 4 . 1): نظرية تايلور في النشر:

بفرض $f(z)$ تابع تحليلي ممثل بالسلسلة:

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

عندها تكون الأمثال a_n معينة كما يلي:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

البرهان:

بما أن $A(z)$ تحليلي على منطقة ما R عندها فهو يقبل الاشتقاق دوماً لهذا يكون:

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+......+a_n(z-a)^n+........$$

$$f`(z)=a_1+2a_2(z-a)+..........$$

$$f`(a) = a_1$$

بنفس الطريقة نجد:

$$f``(a) = 2! \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} f``(a)$$

$$f```(a) = 3.2.1.a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f```(a)}{3!}$$

وبشكل عام نجد:

$$f^{(n)}(a) = a_n.n! \Rightarrow$$

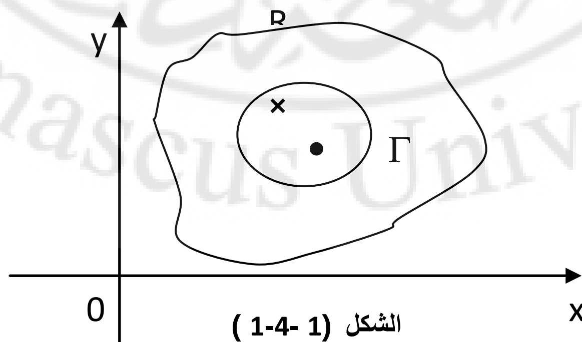
$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

وبالتالي يكون:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

لنبرهن العكس.

إذا كان $f(z)$ تحليلياً على منطقة R من المستوي العقدي ، وكانت a نقطة داخلية من R وكان Γ دائرة تحيط بـ a ومركزها a ويقع Γ ضمن R فإن:



الشكل (1 -4-1)

$$f(z) = f(a) + \frac{f`(a)}{1!}(z-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n fn(z)$$

حيث $f_n(z)$ تابع تحليلي داخل Γ من أجل أي نقطة z داخل Γ .

لدينا حسب علاقة كوشي (صيغ كوشي الأولى):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

لكن

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a+a-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)}$$

$$= \frac{1}{w-a} \quad \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}}$$

وبما أن $|z-a| < |w-a|$ لهذا يمكن النشر وفق سلسلة هندسية أساسها $1 > \left|\dfrac{z-a}{-z+w}\right|$

فنجد

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a}\left[1 + \frac{z-a}{w-a} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + ...\right]$$

$$= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + ... + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} + \frac{h_n}{w-a}$$

وبفرض

$$h_n = \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n} \cdot \frac{(z-a)}{(w-a-z+a)}$$

مهما تكن w من المنحني Γ ، وبذلك نجد:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(w)dw\left[\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+..........+..........+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\frac{h_n}{w-a}\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-a}dw+\frac{(z-a)}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\frac{(z-a)^2}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^3}dw+..........+g_n(z)$$

وحسب صيغ كوشي التكاملية نجد:

$$f(z)=f(a)+\frac{(z-a)}{1!}f`(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f``(a)$$

$$+..............+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a)+g_n(z)$$

حيث:

$$g_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma n}\frac{h_n f(w)dw}{(w-a)}=\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)dw}{(w-a)^n(w-z)}=(z-a)^n f_n(z)$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{n\to\infty} g(z)=0$$

لأن:

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1 \quad , \quad |f(w)|\le M$$

لأن $f(w)$ تحليلي على R ، وبالتالي نحصل على نشر تايلور:

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n}$$

(1 . 4 . 12): نشر ماك لوران:

إذا كانت $a=0$ نحصل على ما يسمى نشر لوران (ماك لوران)، وهو النشر في جوار الصفر:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n}$$

مثال:

انشر التوابع الأساسية في جوار الصفر:

1 . التابع الأسي $f(z)=e^{z}$ نلاحظ أن مشتقات هذا التابع هي نفسها ، وقيمها في $z=0$ هي *1* ولهذا نبدل في سلسلة ماك لوران فنجد:

$$e^{z}=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{1!}z^{2}+\ldots+\frac{1}{n!}z^{n}+\ldots\ldots\ldots$$

ونصف قطر تقارب هذه السلسلة ∞ أي أنها متقاربة في كل المستوي.

2 . نشر التابع الجيبي $f(z)=Sinz$

نلاحظ:

$$f(0)=Sin0=0$$

$$f`(0)=Cos0=1$$

$$f```(0)=-Sin0=0$$

$$f```(0)=-Cos0=-1$$

وهكذا نجد:

$$Sinz = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...$$

$$Sinz = \sum_{n=5}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \forall z$$

3 . نشر التابع $f(z) = Cosz$

نلاحظ:

$$f(0) = Cos0 = 1$$

$$f`(0) = Sin0 = 0$$

$$f``(0) = -Cos0 = -1$$

$$Cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

$$Cosz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \forall z$$

4 . نشر التابع:

$$f(z) = Shz$$

بنفس الطريقة نجد:

$$Shz = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + ...$$

$$Shz = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \forall z$$

5 . نشر التابع: $f(z) = Chz$

$$Chz = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

$$Chz = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad \forall z$$

(1 . 4 . 13): علاقات أولر بين التوابع القطعية والدائرية والتابع الأسي:

من نشر التابع الأسي وجدنا:

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + ... + \frac{1}{n!} z^n + ... \quad \forall z$$

لنبدل كل iz بـ z فجد:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + ...$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ...\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^9}{9!} ....\right)$$

$$e^{iz} = Cosz + iSinz \quad \forall z$$

نبدل كل z – بـ z

$$e^{-iz} = Cosz - iSinz$$

نجمع العلاقتين الأخيرتين فنجد:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2Cosz$$

$$Cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \forall z$$

لو طرحنا تلك العلاقتين لوجدنا:

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2iSinz$$

$$Sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2!} \quad \forall z$$

من نشر التابع الأسي e^z نلاحظ:

$$e^z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + ... \right)$$

$$e^z = Chz + Shz$$

نبدل كل z بـ $-z$ فنجد:

$$e^{-z} = Chz - Shz$$

بجمع العلاقتين الأخيرتين نجد:

$$e^z + e^{-z} = 2Chz$$

$$Chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \forall z$$

ولو طرحنا تلك العلاقتين لوجدنا بعد القسمة على 2.

$$Shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \forall z$$

(1 . 4 . 14): العلاقة بين التوابع الدائرية والقطعية:

من علاقات الجيب والتجيب القطعي نبدل iz في علاقة Chz فنجد:

$$Chiz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = Cosz$$

أي $Chiz = Cosz$

نبدل في علاقة Sh أيضاً كل iz بـ z :

$$Shiz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2!}$$

$$Shiz = i\ Sinz \quad \forall z$$

6 . نشر التابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$

بتطبيق علاقة ماك لوران في النشر نجد:

$$f(z) = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$$

وبتطبيق معيار دلامبير نجد أن شرط النشر هو $|z| < 1$.

7 . نشر التابع $f(z) = \frac{1}{1+z}$

نبدل في نشر $\frac{1}{1-z}$ كل z بـ $-z$ فنجد:

$$f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + ... + (-1)^n z^n$$

$$|z| < 1$$

8 . نشر التابع $f(z) = \ln(1+z)$

نلاحظ أن $[\ln(1+z)]` = \frac{1}{1+z}$

$$[\ln(1+z)]` = 1 - z + z^2 - z^3 + ...$$

بالمكاملة نجد:

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...$$

$$\ln(1+z) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$

9 . نشر التابع $f(z) = \ln(1-z)$ نلاحظ أن:

$$[\ln(1-z)]` = \frac{-1}{1-z}$$

ومنه:

$$\ln(1-z) = -\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} .... \qquad |z| < 1$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$

10 . نشر التابع (نشر ذي الحدين لينوتن):

حقيقي $m \in R \qquad f(z) = (1+z)^m$

نلاحظ:

$$f(0) = 1$$

$$f`(0) = m(1+0)^{m-1} = m$$

$$f``(0) = m(m-1)(1+0) = m(m-1)$$

وهكذا..

$$fz) = (1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2} z^2 + ...$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{n!} z^n + ...$$

$$|z| < 1$$

ملاحظة:

في نشر التوابع 7 . 8 استخدمنا فكرة مشتق سلسلة وتكامل سلسلة ، وهذا ممكن عندما يكون التقارب منتظم وهنا على النطاق $|z| < 1$ كان التقارب كذلك.

(1 . 4 . 15): نشر لورانت:

بفرض Γ_1, Γ_2 دائرتان متمركزتان عند $z = a$ نصف قطر الأولى b_1 والثانية b_2،

لنفرض أن التابع $f(z)$ وحيد القيمة (غير متعدد القيم) وتحليلي على الحلقة:

$$b_1 < |z-a| < b_2$$

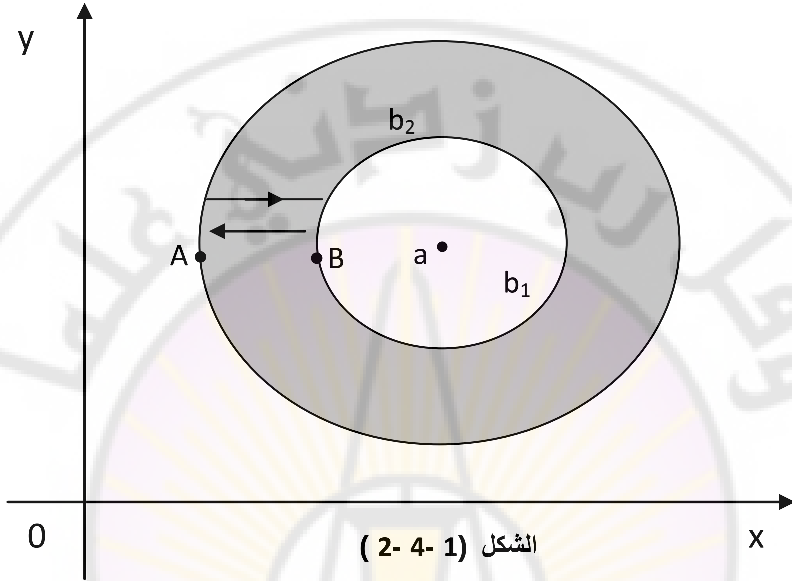
عند ذلك يمكن نشر $f(z)$ وفق السلسلة التالية:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

حيث تعطى الثوابت a_n كما يلي:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \quad dt$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\,dt$$



الشكل (1 -4 -2)

إذا طبقنا نظرية صيغ كوشي التكاملية على المنطقة بسيطة الاتصال الناتجة عن قطع الحلقة بقطعة مستقيمة AB كما في الشكل نجد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma 1}\frac{f(qw)}{w-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma 2}\frac{f(w)}{w-z}\,dt$$

حيث w أي نقطة من الحلقة (المنطقة البسيطة) ولقد وجدنا عند برهان نظرية تايلور أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma 1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

حيث:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$

وبذلك يتم البرهان على:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

وهو نشر لورانت على الحلقة:

$$b_1<|z-a|<b_2$$

ملحوظة:

إن إيجاد نشر لورانت باستخدام الثوابت a_n في عملية معقدة؛ لهذا نستخدم الطريقة السابقة فقط في الأبحاث النظرية وسوف نرى طرقاً أخرى لإيجاد نشر لورانت بشكل أسهل.

(1 . 4 . 16): تعين نوع النقطة الشاذة وفق نشر لورانت:

نلاحظ من نشر لورانت أنه يتألف من جزءين أحدهما يحوي قوى موجبة لـ $(z-a)$ والآخر قوى سالبة لـ$(z-a)$. نسمي الأول بالجزء التحليلي والثاني الجزء الرئيسي. أي لدينا:

$$f(z)=.......+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+...........+\frac{a_{-1}}{z-a}+$$

$$a_0+a_1(z-a)+.......+a_n(z-a)^n+...........$$

وهنا نميز الحالات التالية:

1 . إذا كان نشر لورانت لا يحوي جزءاً رئيسياً عندها تكون $z=a$ نقطة شاذة قابلة للحذف، والتابع يكون عندها غير معرف عند z=a، ولكن يوجد له نهاية يمكن تعريفها بأنها قيمة التابع عند $z=a$.

مثل:

$$f(z)=\frac{z^2-1}{z-1}$$

$f(1)$ غير معرف لكن:

$$\lim_{z\to 1} f(z)=\left[\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)}\right]_{z\to 1}=2$$

2 . عندما يكون الجزء الرئيسي محدوداً وأكبر أس لـ$(z-a)$ في المقام هو n عندها تكون $z=a$ قطباًمن الدرجة n لأن:

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)\neq 0$$

والنهاية موجودة وهي غيرمعدومة.

3 . عندما يكون الجزء الرئيسي غير محدود وعندها $z = a$ نقطة شاذة أساسية لأن $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)$ غير موجودة مهما تكن n.

Soloed problems(17 −4−1) أمثلة محلولة

1 −برهن أن

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+.......+z^n+.......$$

بفرض $|z|\prec 1$

لنفرض أن

$$Sn=1+z+z^2+.....+z^{n-1}$$

لذا

$$z\quad Sn=z+z^2+z^3+.....+z^n$$

بالطرح

$$(1-z)Sn=1-z^n$$

$$Sn=\frac{1-z^n}{1-z}$$

وعندما $n\to\infty$

$$1+Z+Z^2+Z^3+....=\frac{1}{1-Z}$$

لأن $z_{n\to 0}$ عندما $n\to\infty$

2- ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{1}^{\infty} Wn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}}{5^{n/2}}$$

$$\sum Wn = \sum_{1}^{\infty} \frac{2^n e^{i}\frac{n\pi}{6}}{5^{n/2}} = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{6} + iSin\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6} + i\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n Sin\frac{\pi n}{6}$$

لنأخذ سلسلة القيم الحقيقية $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n coS\frac{n\pi}{6}$

$$\left| \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6} \right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \forall n$$

والسلسلة الأخيرة $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$ هندسية أساسها $\frac{2}{\sqrt{5}} \prec 1$ فهي متقاربة لهذا تكون سلسلة القيم الحقيقية متقاربة كذلك سلسلة القيم الوهمية وبالتالي فالسلسلة العقدية متقاربة.

3 - أوجد مجموعة السلسلة العقدية

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + i\frac{1}{n!}\right)$$

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + i\frac{1}{n!}\right) = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + i\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

لنأخذ سلسلة القيم الحقيقية $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

وهي سلسلة هندسية متقاربة لأن أساسها $\frac{1}{2} \prec 1$ مجموعها $1 = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{Z}}$

أما السلسلة الوهمية $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\iota.}}$ فإن مجموعها $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\iota.} = 1 - e$

لأن $e = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\iota.}$

ومنه مجموع السلسلة المطلوبة هو $1 + i(1 - e)$

4–أوجد سلسلة لورانت للتابع

$$f(Z) = \frac{e^{2Z}}{(-1+z)^3}$$

نفرض $z\text{-}1=t \Leftarrow z=1+t$

$$f(t) = \frac{e^{2(1+t)}}{t^3} = e^2 \frac{e^{2t}}{t^3}$$

$$= e^2 \left[\frac{1 + \frac{1}{11} 2t + \frac{1}{21} (2t)^2 + ...}{t^3} \right]$$

$$= \frac{e^2}{t^3} + \frac{2e^2}{t^2} + \frac{2e^2}{t} + e^2 \frac{2^3}{31} t + ...$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+e^2\frac{2^3}{31}+.....$$

والنقطة $z=1$ قطب من الدرجة الثالثة

5–أوجد سلسلة لورانت لـ $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ على الحلقة $1<|z|<3$

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right)$$

$$\frac{1}{2^{z+1}}=\frac{1}{2^{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}}=\frac{1}{2^z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}.......\right)$$

$$=\frac{1}{2^z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z^3} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{2.3(1+\frac{z}{3})}=\frac{1}{6}.\frac{1}{1+\frac{z}{3}}$$

لكن $\left|\frac{z}{3}\right|\prec 1$

$$=\frac{1}{6}\left[1-\frac{z}{z}+\frac{z^2}{z^2}-\frac{z^3}{z^3}+......\right] \qquad (2)$$

وبطرح (2) من (1) نجد

$$f(z)=\frac{1}{2^z}-\frac{3}{2z^2}+\frac{9}{z^2}-\frac{2^7}{z^3}+......$$

مثال 6:

عين نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^n+z^{n+1})$ ثم احسب مجموعها:

الحل:

لأجل تعيين نطاق تقارب السلسلة نطبق أحد معايير التقارب وليكن معيار دلامبير:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(z^{n+1}+z^{n+2})}{(-1)^n(z^n+z^{n+1})}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}(1+z)}{z^n(1+z)}\right|<1$$

$$|z|<1$$

نطاق التقارب.

من أجل حساب المجموع نلاحظ:

$$S_0=1+z$$

$$S_1=1+z-(z-z^2)=1-z^2$$

$$S_2=1-z^2+z^2+z^3=1+z^3$$

....

$$S_n=1+(-1)^n z^{n+1}$$

وبما أنه في مجال التقارب $|z|<1$ لهذا

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1$$

وهي نهاية أو مجموع السلسلة.

مثال 7:

عين نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

الحل: نطبق معيار كوشي.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2\left\|\frac{z+1}{z-1}\right\|<1$$

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right|<3$$

باستبدال $z=x+iy$ نجد المتراجحة التالية:

$$(x-\frac{5}{4})^2+y^2>\frac{9}{16}$$

أي نطاق التقارب هو: $\left|z-\frac{5}{4}\right|>\frac{3}{4}$

مثال 8:

أوجد نشر تايلور للتابع $\cos z$ في جوار $z=\frac{\pi}{4}$ مبيناً شرط النشر.

الحل:

لنفرض $u=z-\frac{\pi}{4}$ عندها $z=u+\frac{\pi}{4}$

نبدل:

$$f(z)=\cos z=\cos\left(u+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos u\ \cos\frac{\pi}{4}+SinuSin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos u+Sinu\right)$$

ننشر في جوار $u=0$ فيكون ذلك في جوار $z=\frac{\pi}{4}$

$$f(z)=F(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}[1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\frac{u^6}{6!}+.........\frac{u}{1!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}............$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+\frac{u}{1!}-\frac{u^2}{2!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^5}{5!}+\frac{u^6}{6!}+\frac{u^7}{7!}............$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+\frac{(z-\frac{\pi}{4})}{}-\frac{(z-\frac{\pi}{4})^2}{2!}-\frac{(z-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\frac{(z-\frac{\pi}{4})^4}{4!}...........]$$

أما شرط النشر فهو $\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<\infty$

مثال 9:

عين جميع حالات نشر لورانت للتابع

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$$

في حلقة مركزها $z=0$ أوجد هذا النشر على الحلقة $0<|z|<1$ مبيناً نوع النقطة الشاذة.

الحل:

النقاط الشاذة هي النقاط التي تعدم المقام وهي: $z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2$

وحالات النشر هي الموافقة لأن يكون النطاق لا يحوي أي نقطة شاذة ولهذا فهي:

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2} \quad , \quad 1<|z|<2 \quad , \quad |z|>2$$

من أجل النشر على الحلقة $0<|z|<1$ نفرق الكسر

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{z-2}$$

$$A=\lim_{z\to 0} \quad z^2 f(z)=\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{z\to 0} \quad [z^2 f(z)]^1=\frac{3}{4}$$

$$C=\underset{z\to 1}{im} \quad (z-1)f(z)=-1$$

$$D=\lim_{z\to 2} \quad (z-2)f(z)=\frac{1}{4}$$

$$f(z)=\frac{\frac{1}{2}}{z^2}+\frac{\frac{3}{4}}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{\frac{1}{4}}{z-2}$$

نلاحظ أن الكسر الأول والثاني منشوران لهذا بقي نشر الكسر الثالث والرابع:

$$\frac{-1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+..........+z^n+...........|z|<1$$

وهذا محقق

$$\frac{\frac{1}{4}}{z-2} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{4(1-\frac{3}{2})} = -\frac{1}{8}\left[1+\frac{z}{2}+(\frac{z}{2})^2+........\right]$$

$\left|\frac{z}{2}\right|<1$ وهذا محقق لأن $|z|<1$

لهذا يكون النشر.

وبجمع النشور نلاحظ:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z^2} + \frac{\frac{3}{4}}{z} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16}z + \frac{31}{32}z^2 + ...$$

$z=0$ قطب من الدرجة الثانية.

مثال 10:

أوجد نشر لورانت للتوابع التالية في حلقة مركزها النقطة الشاذة $z=0$ مبيناً نوع النقطة الشاذة.

$$f_1(z) = \frac{z-Sinz}{z^3} \quad ; \quad f_2(z) = \left(z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}$$

$$f_3(z) = \frac{1}{Sh^2 z} \quad ; \quad f_4(z) = \frac{e^{2z}-1}{z^4}$$

الحل:

$$f_1(z) = \frac{z-\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+.........\right)}{z^3}$$

$$= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} ....$$

$z = 0$ نقطة شاذة قابلة للحذف.

$$f_2(z) = \left(z + \frac{1}{z} \right) e^{\frac{1}{z}}$$

$$= \left[z + \frac{1}{z} \right] \left[1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + ... \right]$$

$z = 0$ نقطة شاذة أساسية.

$$f_3(z) = \frac{1}{Sh^2 z} = \frac{1}{\left[\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + ... \right]^2}$$

$$= \frac{1}{z^2 [1 + \alpha(z)]^2}$$

حيث:

$$\alpha(z) = \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...$$

نلاحظ أن $\alpha(z) \to 0$

عندما $z \to 0$

لهذا $|\alpha(z)| < 1$

$$f_3(z) = \frac{1}{z^2} [1 + \alpha(z)]^{-2}$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1 - 2\alpha(z) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\alpha^2(z) + ...\right]$$

$$= \frac{1}{z^2} - 2\left(\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!}.........\right) + \frac{3}{z^2}\alpha^2(z) + ...$$

$z = 0$ قطب من المرتبة الثانية.

$$f_4(z) = \frac{e^{2z} - 1}{z^4} = \frac{1 + \frac{(2z)}{1!} + \frac{(2z)^2}{2!} + ...}{z^4}$$

$$= \frac{2}{z^3} + \frac{4}{2!z^2} + \frac{8}{3!z} + \underbrace{\frac{16}{4!} + \frac{32}{5!}z....}_{\text{جزء تحليلي}}$$

$z = 0$ قطب من الدرجة الثالثة.

مثال 11:

عين وبين النقطة الشاذة للتوابع التالية وعين الراسب:

$$f_1(z) = Sin\frac{1}{z} \quad ; \quad f_2(z) = \frac{1}{\cos z}$$

$$f_3(z) = tgz \quad ; \quad f_4(z) = \frac{z + i}{(z^2 + 1)^2}$$

$$f_5(z) = \frac{1}{Chz}$$

الحل:

$$f_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$z = 0$ شاذة أساسية الراسب عندها 1

$$f_2(z) = \frac{1}{\cos z}$$

$$z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

أقطاب بسيطة الراسب عندها:

$$\lim_{z \to (2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{z - (2k+1)\frac{\pi}{2}}{\cos z}$$

$$= \frac{1}{-Sin(2k+1)\frac{\pi}{2}} = (-1)^k \qquad k = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_3(z) = tgz = \frac{Sinz}{Cosz}$$

$$z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

أقطاب بسيطة الراسب عندها:

$$\lim_{z \to (2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\left(z - (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) Sinz}{\cos z}$$

$$= \frac{Sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{-Sin(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$f_4(z) = \frac{z+i}{(z^2+1)^2} = \frac{(z+i)}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

$z=-i$ قطب بسيط $z=i$ قطب مضاعف.

$$\text{Re}\,s[f_3(z),-i] = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)^2}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{Re}\,s[f_3(z),i] = \lim_{z\to i} \left[\frac{(z+i)(z-i)^2}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]^1$$

$$= \frac{-1}{(z+i)^2}\bigg|_{z=-i} = \frac{-1}{(2i)^2} = \frac{1}{4}$$

$$f_5(z) = \frac{1}{Chz} = \frac{1}{Cosiz}$$

الأقطاب $Cosiz = 0$

$$iz = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$z_5 = i(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

أقطاب بسيطة:

$$\text{Re}\,s[f_5(z),z_0] = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{Cos\ iz}$$

$$= \frac{1}{-iSini(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{iSh(2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{Sh(2l+1)\frac{\pi}{2}}$$



تمارين إضافية (1−4− 18)Supplementary problems

1−اختبر تقارب السلاسل التالية:

أ− $\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z-4i}{4}\right)^n$ ؛ ب− $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{n+2}\right)^n$

ح− $\sum_{1}^{\infty}\frac{i^n}{n^3+n^2+2n}$ ؛ ء− $\sum_{1}^{\infty}\frac{(n^3+3^n)i^n}{3^n n^3}$

الأجوبة: أ− ب متباعدة ح−ء متقاربة

2−عين نقطة تقارب كل من السلاسل:

أ− $\sum_{0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+1)(n+2)}$ ؛ ب− $\sum_{0}^{\infty}(z-2i)^n$

جـ− $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n\iota}$ ؛ ء− $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(z+i)n}$

الأجوبة: أ− $1<|z-2i|$ ؛ ب− $1<|z+i|$

جـ− $2>|z+i|$ ؛ ء− $|z|<\infty$

3− عين سلسلة تايلور للتابع $f(z)=ze^{2Z}$

في جوار $g=-1$

4–عين سلسلة ماك لوران للتوابع

$$f_1(Z)=\frac{1}{\left(1+z^3\right)^2};\quad f_2(Z)=\frac{1}{\left(1-z^2\right)^2}$$

$$f_3(Z)=f_n\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)\ ,\ f_4(Z)=coS^2Z+CH^2Z$$

5 . مستعملاً تعريف تقارب سلسلة برهن أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)=1\forall z$$

6 . برهن على تقارب السلسلة:

$$\sum_{1}^{\infty} z^n(1-z)$$

ثم أوجد مجموعها في نطاق التقارب.

7 . برهن أن السلسلة $\left\{\frac{1}{1+nz}\right\}_{n=`,2,........}$ تتقارب بانتظام من الصفر وذلك مهما يكن $2\geq|z|$، وهل يمكن توسيع نطاق التقارب؟

8 . برهن أن السلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ متقاربة مطلقاً من أجل $1\leq|z|$

9 . أوجد نطاق تقارب السلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

10 . أوجد سلاسل لورانت للتوابع التالية:

$$F_1(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)z} \quad , \quad z = 1$$

$$F_2(z) = (z-3)Sin\frac{1}{z+2} \quad , z = -2$$

11 . انشر التابع $F(z) = \frac{4}{(z+3)(z+4)}$ حيث $3 < |z| < 4$

12 . انشر التابع $F(z) = \frac{z}{(z+1)(z+3)}$

في الحالات التالية:

أ . $1 < |z| < 3$

ب . $|z| > 3$

ج . $0 < |z+1| < 2$

د . $|z| < 1$

الفصل الخامس

نظرية الرواسب وتطبيقاتها

The Residues Theorem and it's Applications

تمهيد:

بفرض $f(z)$ تابعٌ تحليليٌ على منطقة محاطة بالدائرة المستمرة المغلقة والموجهة والصقيلة أو الصقيلة جزئياً Γ_1 فيما عدا مركز الدائرة Γ_1 ، ولقد وجدنا أنه يمكن نشر هذا التابع وفق سلسلة لورانت كمايلي:

$$f(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a_n}{(z-a)^n} + \frac{a_{(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots\ldots\ldots$$

وعينا هذه الثوابت وفق العلاقات:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}\,dz$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

حيث Γ دائرة مركزها 0 تقع داخل Γ_1 ، فنلاحظ من علاقة a_{-n} أنه من أجل $n=1$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\, dz$$

أي:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

أي أن الثابت a_{-1} له صفة مميزة وهي أنه لو عرف لأمكن حساب التكامل $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ مع أن $f(z)$ شاذ في النقطة a الواقعة داخل Γ ، فنسمي هذا الثابت براسب التابع $f(z)$ عند النقطة الشاذة $z = a$ ونرمز له بـ

$$\operatorname{Re}s[f(z), a] = a_{-1}$$

(1 . 5 . 1): طرق حساب الرواسب:

إن إيجاد الراسب وفق العلاقة التكاملية السابقة أمر ليس بالسهل؛ ولهذا يلجأ إلى طرق أخرى نرتبها حسب نوع النقطة الشاذة.

1 . النقطة الشاذة القابلة للحذف: يكون فيها نشر لورانت لا يحوي أمثال $\frac{1}{z-a}$ وبالتالي يكون الراسب صفراً.

2 . القطب البسيط: يتعين الراسب عندها من العلاقة:

$$\operatorname{Re}s[f(z), a] = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

مثال ذلك:

$$f(z) = \frac{z+2}{z-1}$$

$z=1$ قطب بسيط

$$\operatorname{Re}s[f(z),a]=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+2)}{(z-1)} \quad =3$$

3 . النقطة الشاذة قطب من الدرجة n :

عندها يتعين الراسب من العلاقة:

$$\operatorname{Re}s\left[f(z),a\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^n f(z)\right]'$$

مثال ذلك:

$$f(z)=\frac{Sinz}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

التابع شاذ عند $z=-\frac{\pi}{2}$ لهذا يكون

$$\operatorname{Re}s\left[f(z),\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2 Sinz}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]'$$

$$\operatorname{Re}s\left[f(z),-\frac{\pi}{2}\right]=\left[Sinz\right]'_{z=\frac{\pi}{2}}=\left[-Cosz\right]_{z=-\frac{\pi}{2}}=0$$

4 . النقطة شاذة أساسية:

عندها لا يوجد طريقة غير النشر وتعين أمثال $\frac{1}{z-a}$

مثال ذلك:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$$

ننشر في جوار $z = 2$

$$= 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + ...$$

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), z=2\right] = 1$$

(1 . 5 . 2): نظرية الرواسب:

بفرض $\overline{D}$ منطقة يحيط بها المنحني Γ ، وإذا كان $f(z)$ تحليلياً على $\overline{D}$ فيما عدا الأقطاب أو النقاط الشاذة الأساسية داخل $\overline{D}$ ، فعندها:

$$I = \oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re}s\left[f(z), a_j\right]$$

a_j هي الأقطاب أو النقاط الشاذة الواقعة داخل $\overline{D}$.

البرهان:

نحيط كل نقطة شاذة a_j بمنحنٍ موجهٍ ومستمر Γ_j حيث $j = 1,....,k$ ، وبما أن $f(z)$ تحليلي على المنطقة المحصورة بين Γ والمنحنيات $\Gamma_1.....\Gamma_k$ ، فتكون هذه المنحنيات الأخيرة مكافئة للمنحني Γ ، أي حسب نظرية كوشي في التوابع التحليلية يكون لدينا:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma 1} f(z)dz + ... + \oint_{\Gamma_k} f(z)dz$$

وحسب تعريف الراسب نجد:

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), a_j\right] = 2\pi i \oint_{\Gamma j} f(z)dz \quad j = 1,........,k$$

ومنه:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), a_1] + ... + 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), a_k]$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}[f(z), a_j]_{a_j = 1,2,........,k}$$

(1 . 5 . 3): الراسب في اللانهاية:

إذا أضفنا النقطة $z = \infty$ إلى المستوي العقدي نحصل على ما يسمى بالمستوي العقدي الموسع.

(1 . 5 . 4): تعريف:

نعرف راسب التابع $w = f(z)$ في اللانهاية بأنه يحقق الخاصة:

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}[f(z), a_j] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$$

حيث a_j الأقطاب الواقعة داخل المنحني Γ الذي يحسب عليه التكامل.

يعطى راسب اللانهاية للتابع $f(z)$ كمايلي:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left\{ \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u^2}\right) \right\}$$

البرهان:

نعلم أن:

$$I = \oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{k} \operatorname{Res}[f(z), a_j]$$

a_j الأقطاب داخل Γ ، ولنجرِ التحويل

$$z = \frac{1}{u} \quad , \quad dz = -\frac{1}{u^2} du$$

$$I = \oint_{\Gamma} f(z) dz = -\oint_{\Gamma 1} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u^2}\right) du$$

وحسب نظرية الرواسب نجد:

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{Re} s\left(-\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)\right)\right]$$

$$= 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{k} \operatorname{Re} s\left[f(z), a_j \right]$$

ومنه:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \operatorname{Re} s\left[f(z), a_j \right] + \operatorname{Re} s[f(z), \infty] = 0$$

حيث Γ_1 منحنٍ محيط بالنقطة $u = 0$ وجهة الدوران عكس عقارب الساعة، ولا يوجد فيه غير $u = 0$ نقطة شاذة.

ملحوظة:

بفرض $f(z)$ يراد مكاملته على منطقة D يحدها المنحني الموجه Γ ، وأقطابه داخل هذا المنحني هي $a_1 \ldots\ldots a_n$ ؛ لهذا نحسب هذا التكامل كما يلي:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \left[\operatorname{Re} s a_1 + \ldots\ldots + \operatorname{Re} s a_n \right]$$

$$= -2\pi i \operatorname{Re} s(f(z), \infty)$$

$$u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{u} = \infty$$

وهذا يسهل علينا الحساب.

تطبيق:

احسب التكامل:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{z^5 + z + 1}{z^2(z^4 - 1)} dz$$

حيث Γ الدائرة $|z| = \frac{3}{2}$

الحل:

نلاحظ لدينا خمسة أقطاب تقع داخل الدائرة Γ ، لهذا يكون:

$$I = 2\pi i\left[\operatorname{Re}s[a_1] + \ldots + \operatorname{Re}s[a_5]\right]$$

$$= -2\pi i \operatorname*{Re s}_{z=\infty} f(z)$$

نجد:

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), \infty\right] = -\operatorname*{Re s}_{u=0} \frac{1}{u^2} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)^5 + \frac{1}{u} + 1}{\left(\frac{1}{u}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{4}\right)^4 - 1\right]}$$

$$= -\operatorname{Re}s\left[\frac{1 + u^4 + u^5}{1 - u^4}\right]_{u=0} = -1$$

$$I = -2\pi i(-1) = 2\pi i$$

(1 . 5 . 5): تطبيقات نظرية الرواسب في التكاملات الحقيقية:

سوف نبين أنه يمكن استخدام نظرية الرواسب في حساب بعض التكاملات الحقيقية وذلك باستخدام محيط معين واختيار تابع معين.

1 . حساب التكامل من الشكل:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

لحساب هذا التكامل يلزم مايلي:

1 . حدود التكامل كما هي واضحة $(0,2\pi)$.

2 . التابع $f(Cos\theta, Sin\theta)$ تابع كسري جبري بسيط بـ $Sin\theta, Cos\theta$ (أي تابع كسري مثلثاتي) ومقامه لا ينعدم من أجل أية قيمة حقيقية لـ θ .

عندها نتبع مايلي:

نفرض $z = e^{i\theta}$ فنجد أن حدود التكامل أصبحت توافق المنحني $|z| = 1$ وبالتالي:

$$Sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$Sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2i}$$

$$Cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$Cos\theta = \frac{z^2+1}{z^2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

نبدل في علاقة التكامل فنجد:

$$I = \oint f\left(\frac{z^2+1}{z^2}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{1=|z|=\Gamma} F(z)dz$$

وحسب نظرية الرواسب فإن هذا التكامل يساوي:

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[F(z), a_j\right]$$

a_j الأقطاب الواقعة داخل $|z| = 1$.

تطبيق:

احسب التكامل الحقيقي:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{Sin\theta + 3}$$

نفرض $z = e^{i\theta}$ فنجد $|Z| = 1$ حدود التكامل.

$$Sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz} \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z^2-1}{2iz}+z}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z^2+6iz-1}{2iz}}$$

$$= 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+6iz-1}$$

الأقطاب تتعين بـ:

$$z^2+6iz-1=0 \quad \Delta=-32$$

$$z_1=-\frac{6i-4i\sqrt{2}}{2} \notin |z|<1$$

$$z_2=\frac{-6i+4i\sqrt{2}}{2}=(-3+2\sqrt{2})i \in |z|<1$$

هناك قطب بسيط واحد لنحسب الراسب عنده.

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_2]=\lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{z^2+6iz-1}$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),z_2]=\frac{1}{2(z_2)+6i}$$

$$=\frac{1}{2i(-3+2\sqrt{2})+6i}$$

$$= \frac{1}{4i\sqrt{2}}$$

$$I = 2\pi i(2)\left(\frac{1}{4i\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

<u>2 . حساب التكاملات ذات الشكل:</u>

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$$

حيث $f(x)$ تابع كسري جبري بسيط، من أجل ذلك نتأكد من الشروط التالية:

1 . حدود التكامل $(-\infty, \infty)$.

2 . $f(x)$ تابع كسري جبري بسيط لا ينعدم مقامه من أجل قيمة حقيقية لـ x .

3 . درجة البسط في $f(x)$ أقل من درجة المقام بـ2 على الأقل أو أنه يحقق:

$$xf(x) \to 0$$

$$x \to \infty$$

عند ذلك نختار التابع $f(z)$ الناتج عن استبدال Z بـ x في $f(x)$ ، ونكامل هذا التابع على المنطقة $\overline{D}$ وهي نصف دائرة فوق محور العينات نصف قطرها R يسعى إلى اللانهاية.

يمكن البرهان ضمن هذه الشروط أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \oint_{\Gamma} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[f(z), a_j\right]$$

حيث a_j الأقطاب الواقعة فوق محور السينات.

بسهولة نرى:

$$\oint_{D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=1} \operatorname{Re}s\left[f(z), a_j\right]$$

$$\oint_{D} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(\operatorname{Re}^{i\theta})\, i\operatorname{Re}^{i\theta}\, d\theta + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

لكن التكامل الأول يسعى إلى الصفر عندما $R \to \infty$ حسب الشروط المفروضة؛ لأن طويلته $|zf(z)|$ تسعى إلى الصفر وبالتالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Re}s\left[f(z), a_j\right]$$

تطبيق:

احسب التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

الحل:

نلاحظ أن حدود التكامل $(-\infty, \infty)$، والتابع $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$ يحقق:

المقام لا ينعدم من أجل قيمة حقيقية لـ x كذلك درجة البسط أقل من درجة المقام بـ4 ويكفي 2، عندها نختار $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$ ونبحث عن أقطابه:

$$z^4+1=0 \quad ; \quad z^4=-1=e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z=e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4})} \qquad k=0,1,2,3$$

الأقطاب الواقعة فوق محور السينات (في نصف المستوي العلوي) هي:

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

وهي أقطاب بسيطة، بهذا تحسب الرواسب كما يلي:

$$\operatorname{Res}\left[f(z),e^{i\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}{z^4+1}$$

$$=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{1}{4z^3}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z),e^{i\frac{\pi}{4}}\right]=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

$$=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{1}{4z^3}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z),e^{i\frac{\pi}{4}}\right]=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z),e^{i\frac{3\pi}{4}}\right]=\frac{1}{4.e^{(\frac{3\pi}{4})^3}}=\frac{1}{4}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$I=2\pi i\left[\frac{1}{4}\left[Cos(\frac{3\pi}{4})-iSin\frac{3\pi}{4}\right]\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}-iSin\frac{\pi}{4}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{2\pi i}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{\pi i}{2}\left(-\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

3 . حساب التكاملات ذات الشكل:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Cosmx\,dx$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,Sinmx\,dx \qquad m>0$$

من أجل ذلك نتأكد من الشروط التالية:

1 . $0<m$ وحدود التكامل $(-\infty,\infty)$.

2 . التابع $f(x)$ كسري جبري بسيط مقامه لا ينعدم من أجل قيمة حقيقية لـ x .

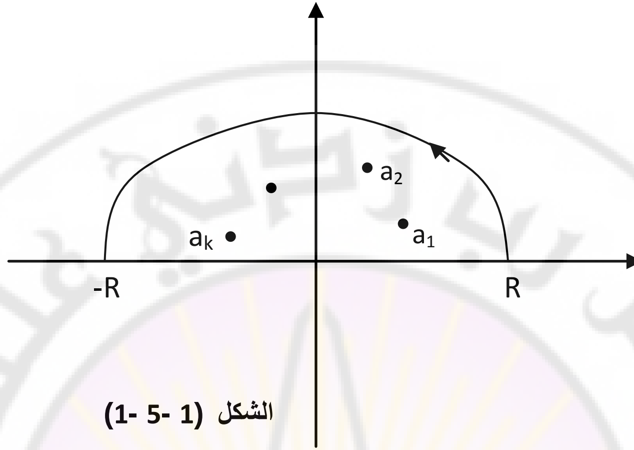
3 . درجة البسط أقل من درجة المقام بـ1 على الأقل أي $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

عند ذلك نختار التابع

$$f(z)=e^{imz}f(z)$$

حيث $f(z)$ نحصل عليه من $f(x)$ باستبدال z بـ x ونكامل على المنطقة $\overline{D}$ الظاهرة في الشكل، وهي نصف دائرة فوق محور السينات نصف قطرها R يسعى إلى ∞ فنجد:

$$\oint_{\overline{D}} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re}s\left[f(z), a_j\right]$$



الشكل (1- 5- 1)

a_j الأقطاب فوق محور السينات.

إن التكامل $\oint_{\Gamma} f(z)dz$ يسعى إلى الصفر عندما تسعى z إلى ∞ وفق شروط المسألة المفروضة؛ لهذا يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Re}s\left[f(z), a_j\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, Cosmx\, dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, Sinmx\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re}s\left[f(z), a_j\right]$$

$$I_1 + iI_2 = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Re}s\left[F(z), a_j\right]$$

$$I_1 = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Re}s\left[F(z), a_j\right]\right\} \quad ; \quad I_2 = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re}s[F(z), a_j\right\}$$

تطبيق:

احسب التكامل:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cosx}{x^2+1}\, dx$$

الحل:

$m=1$ وحدود التكامل $(-\infty,\infty)$

التابع $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

المقام لا ينعدم من أجل قيمة حقيقية لـ x كذلك درجة البسط أقل من درجة المقام بـ2 يكفي 1

نختار التابع:

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

نبحث عن الأقطاب الواقعة فوق محور السينات (في نصف المستوي العلوي).

$$z^2+1=0 \Rightarrow z=i \in \overline{D}$$

$$z=-i \in \overline{D}$$

$$\operatorname{Re}s[F(z),i] = \lim_{z\to 1} \frac{(z-i)e^{iz}}{z^2+1}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{2z}$$

$$= \frac{e^{-}}{2i} = \frac{1}{2ie}$$

$$I = \text{Re}\left\{2\pi i\left(\frac{1}{2ie}\right)\right\}$$

$$I = \frac{\pi}{e}$$

4 . حساب التكاملات:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ Cosmx\ dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ Sinmx\ dx$$

ضمن الشروط الواردة في الحالة 2 و 3 عدا شرط عدم وجود أقطاب حقيقية للتابع $f(z)$.

وهنا في هذه الحالة نفترض إمكانية وجود هذه الأقطاب، وبمناقشة مشابهة لما ورد في الحالتين 2 و 3 نجد:

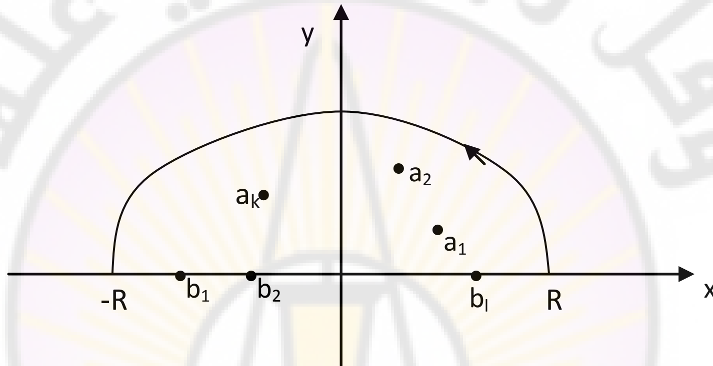
$$I = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} \text{Re}\,s\left[F(z), a_j\right] + \pi i\sum_{j=1}^{l} \text{Re}\,s\left[F(z), b_j\right]$$

$$I_1 = \text{Re}\left\{2\pi i\sum_{j=1}^{k} \text{Re}\,s\left[F(z), a_j\right] + \pi i\sum_{j=1}^{l} \text{Re}\,s\left[F(z), b_j\right]\right\}$$

$$I_2 = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Re}s\left[F(z),a_j\right]+\pi i\sum_{j=1}^{l}\operatorname{Re}s\left[F(z),b_j\right]\right\}$$

حيث b_j الأقطاب الواقعة على محور السينات.

a_j الأقطاب الواقعة فوق محور السينات وأما المنطقة $\overline{D}$ فهي الظاهرة بالشكل:



الشكل (1 -5 -2)

تطبيق:

احسب التكامل الحقيقي:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sinx}{x^3 - 1}\, dx$$

نلاحظ أن $m = 1$ وحدود التكامل $(-\infty, \infty)$ والتابع $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$ درجة البسط أقل من درجة المقام بـ3 يكفي 1 كذلك ينعدم المقام على محور السينات وفوق محور السينات نختار التابع:

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^3 - 1}$$

لنعين الأقطاب المطلوبة:

$$z^3 = 1 = e^{2\pi k}$$

$$z = e^{i\frac{2\pi k}{3}} \quad k = 0,1,2$$

$$z_0 = 1 \quad \in \quad y = 0$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \in \quad y > 0$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \in \quad y < 0$$ غير مطلوب

وهي كلها أقطاب بسيطة.

$$\operatorname{Res}[F(z),1] = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^3 - 1}$$

$$= \frac{e^i}{3(1)^2} = \frac{1}{3}e^i$$

$$\operatorname{Res}\left[F(z), e^{i\frac{\pi}{3}}\right] = \lim_{z \to e^{i\frac{2\pi}{3}}} \frac{(z - e^{i\frac{2\pi}{3}})e^{iz}}{z^3 - 1}$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}{3e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3}.e^{i(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})}.e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}.e^{i(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}})}.(Cos\frac{4\pi}{3}.iSin\frac{4\pi}{3})$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{3}.e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{3}\left(Cos\frac{1}{\sqrt{2}}-iSin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{3}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}Cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}Sin\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(Cos\frac{1}{\sqrt{2}}+Sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$I=\text{Im}\left[2\pi i\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{3}\left(\frac{Sin\frac{1}{\sqrt{2}}-Cos\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+i\left(\frac{Cos\frac{1}{\sqrt{2}}+Sin\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\pi i\left(\cos 1+iSin1\right)\right]$$

$$I=\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{3}\left[\frac{Sin\frac{1}{\sqrt{2}}-Cos\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+Cos1\right]$$

5 . حساب التكامل:

$$I=\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx$$

p عدد كسري.

لأجل حساب هذا التكامل نتأكد من تحقق الشروط التالية:

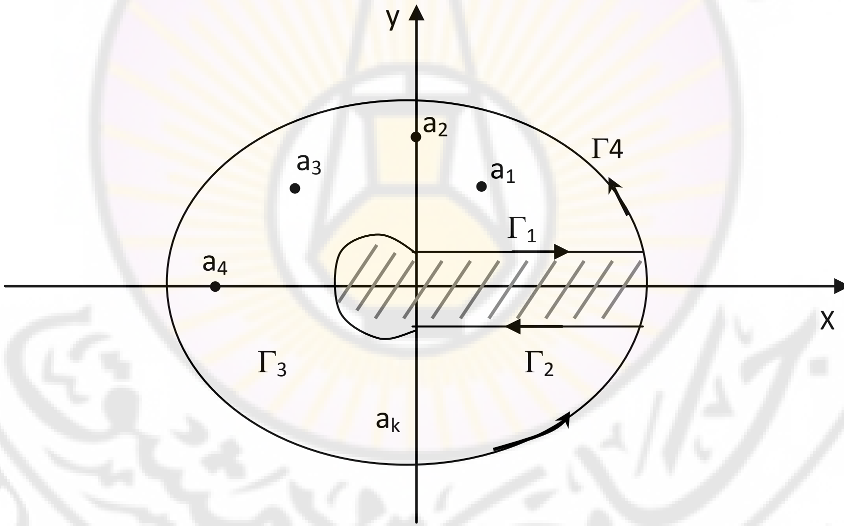
1 . p كسري وحدود التكامل من *0* إلى ∞ .

2 . التابع $f(z)$ يحقق مايلي:

أ . لا ينعدم مقامه من أجل قيمة حقيقية موجبة لـ x .

ب . يحقق $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to\infty}} x^p f(x)=0$

عند ذلك نكامل التابع $z^{p-1}f(z)$ على المنطقة الظاهرة بالشكل:



الشكل (1 -5 -3)

فنجد عندها أن:

$$I=-\frac{\pi}{SinP\pi}.e^{-ip\pi}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}\left[z^{p-1}f(z),a_j\right]$$

a_j الأقطاب داخل $\overline{D}$.

البرهان:

إن المنطقة المختارة كما في الشكل هي دائرة مركزها O ونصف قطرها R يسعى إلى ∞ ، حذف منها نصف المحور ox لأن $z=0$ نقطة تفرع للتابع $z^{p-1}f(z)$ ، وعليه فإن التكامل عليها يمكن تجزئته إلى أربعة تكاملات وهي:

1 . التكامل على الدائرة الكبرى ونصف قطرها R .

2 . التكامل على الدائرة الصغرى ونصف قطرها r .

3 . التكامل على القطعة المستقيمة من المركز إلى محيط الدائرة وعليها $z=x$

4 . التكامل على القطعة المستقيمة من محيط الدائرة إلى المركز وعليها $z=xe^{i2\pi}$ بسبب الدوران دورة كاملة.

أي لدينا حسب نظرية الرواسب:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\ z^{p-1}dz = \int_{\Gamma 1} z^{p-1} f(z)dz + \int_{\Gamma 2} z^{p-1} f(z)dz$$

$$+\int_{\Gamma 3} z^{p-1} f(z)dz + \int_{\Gamma 4} z^{p-1} f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Re}s\left[z^{p-1} f(z), a_j\right]$$

$$\int_{A}^{B} x^{p-1} f(x)dx + \int_{C}^{D} (xe^{i2\pi})^{p-1} f(xe^{i2\pi}) d(xe^{2\pi i})$$

$$+I_1 - I_2 = 2\pi i(\operatorname{Re}sa_1 + ... + \operatorname{Re}sa_2)$$

حيث I_1 التكامل على الدائرة الكبرى و I_2 على الصغرى، وسوف نبرهن أن نهايتهما صفر.

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)dx - e^{2\pi ip}\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)dx =$$
$$2\pi i(\operatorname{Re} sa_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \operatorname{Re} sa_2)$$

$$(1-e)^{2i\pi p}\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)dx = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re} s\left[z^{p-1} f(z), a_j\right]\right)$$

$$\int_0^{\infty} xp-1 f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ip}}\left(\operatorname{Re} sa_1 + \dots\dots\dots + \operatorname{Re} sa_k\right)$$

لكن:

$$\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ip}} = \frac{\pi}{e^{ip\pi}}\,\frac{2i}{e^{-i\pi p}-e^{i\pi p}} = -\frac{\pi}{e^{ip\pi}}\,\frac{1}{\frac{e^{i\pi p}-e^{-i\pi p}}{2i}} = -\frac{\pi}{Sinp\pi}e^{-ip\pi}$$

ومنه:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x)dx = \frac{-x}{Sinp-x}e^{-ip\pi}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re} s\left[z^{p-1} f(z), a_j\right]$$

إن التكاملين على I_1 و I_2 ينعدمان لأن:

$$z^p f(z) \to 0,\ z \to 0,\ z \to \infty$$

حسب الشروط، ولهذا فهذان التكاملان ينعدمان لانعدام طويلتيهما.

تطبيق:

احسب التكامل:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\, dx$$

نلاحظ الشروط محققة ولهذا نجد أن الأقطاب هي أقطاب التابع $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ وبالتالي فهي $z = \pm i$ وهي أقطاب بسيطة.

$$p = \frac{3}{2} \qquad\qquad p-1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{z\to i} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{1+z^2}.(z-i) = \operatorname{Res}\left[z^{\frac{1}{2}} f(z), i\right]$$

$$\operatorname{Res}\left[z^{\frac{1}{2}} f(z), i\right] = \left.\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i}$$

$$\operatorname{Res}\left[z^{\frac{1}{2}} f(z), -i\right] = -\frac{e^{+i3\frac{\pi}{4}}}{2i}$$

$$I = -\frac{\pi}{Sin\dfrac{3\pi}{2}}.e^{-i3\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2i}\right)$$

$$= \frac{-\pi}{-1}(i)\,\frac{Cos\dfrac{\pi}{4}}{i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

تمارين وأمثلة محلولة (1 – 5 – 6) Solved Problems

مثال 1:

بين أنواع النقاط الشاذة في كل مما يلي وعين الراسب عند كل منها:

$$f_1(z) = \frac{z^2}{z^4+16}$$

$$z^4+16=0 \qquad z^4=-16=16e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right)} \qquad k=0,1,2,3$$

$$z_0, z_1, z_2, z_3$$

أقطاب بسيطة.

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_j\right] = \lim_{z\to z_j} \frac{(z-z_j)z^2}{z^4+16} \qquad j=0,1,2,3$$

$$= \frac{z_j^2}{4z_j^3} = \frac{1}{4z_j}$$

$$f_2(z) = \frac{ze^z}{z^4-z^2}$$

$$z^4-z^2 = z^2(z^2-1)=0$$

$z=0$ قطب بسيط لأن $z=0$ نقطة شاذة قابلة للحذف.

$z=\pm 1$ أقطاب بسيطة.

$$\operatorname{Re}s[f_2,0]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^2(z)e^z}{z^2(z^2-1)}\right]^1$$

$$=\left.\frac{(e^z+ze^z)(z^2-1)-2z(z)e^z}{(z^2-1)^2}\right|_{z=0}$$

$$\operatorname{Re}s[f_2,0]=\frac{-1}{1}=1$$

$$\operatorname{Re}s[f_2,-1]=\lim_{z\to -1}\frac{(z+1)ze^z}{z^2(z-1)(z+1)}=$$

$$=\frac{-e^{-1}}{-2}=\frac{1}{2e}$$

$$\operatorname{Re}s[f_2,1]=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)ze}{z^2(z-1)(z+1)}$$

$$\operatorname{Re}s[f_2,1]=\frac{e}{2}$$

$$f_3(z)=Cotg\ z=\frac{Cosz}{Sinz}$$

$$Sinz=0$$

$z=k\pi$ أقطاب بسيطة.

$$\operatorname{Re}s[f_3(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)Cosz}{Sinz}$$

$$=\left.\frac{Cosz}{Cosz}\right|_{z=k\pi}=1$$

مثال 2:

احسب التكامل:

$$I = \int_{1=|z|} \frac{z^2}{Sin^3 z}\, dz$$

ننشر التابع $Sinz$ في جوار الصفر.

$$f(z) = \frac{z^2}{\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + ...\right)^3} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{[1-\alpha(z)]^{+3}}$$

$$\alpha(z) = \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + ...$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 - \frac{3}{1!}\alpha(z) + \frac{(-3)(-4)}{2i}\alpha^2(z) + ...\right]$$

نلاحظ أن $z = 0$ قطب من الدرجة الأولى الراسب عندها 1 وبالتالي:

$$I = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

مثال 3: احسب التكامل:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^2 Sin^2 z}\, dz$$

ننشر التابع المستكمل في جوار الصفر النقطة الشاذة الواقعة داخل $|z| = 1$.

$$\frac{e^z - 1}{z^2 Sin^2 z} = \frac{z + \dfrac{z^2}{2i} + ...}{z^2 . z^2 \left(1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} ....\right)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z} + ...\right] [1 - \alpha(z)]^{-2}$$

$$\alpha(z) = \frac{-z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...$$

$$= \left[\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z} + ...\right] [1 + (-2)\alpha(z) + ...$$

$$= \left[\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z} + ...\right] \left[1 - 2\left(-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...\right) + \right.$$

$z = 0$ قطب من المرتبة *3*.

نبحث عن أمثال $\frac{1}{z}$

أمثال $\frac{1}{z}$ $= \text{Re}\, s[fz),0] = +\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

إذاً:

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right) = \pi i$$

مثال 4:

احسب التكامل:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{Sin\theta}{Cos\theta + 2}\, d\theta$$

بفرض $z = e^{i\theta}$ نجد:

$$Sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \qquad Cos = \frac{z^2+1}{z^2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

نبدل:

$$I = \oint_{1=|z|} \frac{\frac{z^2-1}{2iz}}{\frac{z^2+1}{2z} + 2} \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{1=|z|} \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 4z + 1)}\, dz$$

$$z(z^2 + 4z + 1) = 0$$

$z = 0$ قطب بسيط داخل $|z| = 1$

$$z^2 + 4z + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12$$

$$z_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3} \notin |z| < 1 \qquad , \qquad Z_2 = -2 + \sqrt{3} \in |z| < 1$$

وهو قطب بسيط أيضاً.

$$\lim_{z\to 0}\frac{-z(z^2-1)}{z(z^2+4z+1)}=+1=\operatorname{Re}s[f(z0,0]$$

$$\operatorname{Re}s[f(z),-2+\sqrt{3}]=\lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\frac{z(z^2-1)}{z(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}=-1$$

$$I=2\pi i(+1-1)=0$$

مثال 5: احسب التكامل:

$$I=\int_0^\infty\frac{dx}{x^6+1}$$

نلاحظ أن التابع $f(x)=\dfrac{1}{x^6+1}$ زوجي، لهذا

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$$

الشروط في الحالة الثانية محققة لهذا نختار $f(z)=\dfrac{1}{z^6+1}$ فنجد أن الأقطاب تتعين بـ:

$$z^6+1=0$$

$$z^6=-1=e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{6}\right)}\qquad k=0,1,2,3,4,5$$

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}\qquad z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_3=e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

أما الأقطاب z_3, z_4, z_5 فهي تقع تحت محور السينات ولا لزوم بها.

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{z^6 + 1}$$

$$= \frac{1}{6\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi}{6} i}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_1\right] = \frac{1}{6} e^{-i\frac{5\pi}{2}} = \frac{1}{6} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_2\right] = \frac{1}{6} e^{-\frac{25}{6}\pi i} = \frac{1}{6} e^{-\frac{\pi}{6}}$$

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\frac{1}{6}\left(Cos\frac{5\pi}{6} - iSin\frac{5\pi}{6} + Cos\frac{\pi}{2} - iSin\frac{\pi}{2} + +Cos\frac{\pi}{6} - iSin\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi i}{6}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + 0 - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi i}{6}\left[-2i\right] = \frac{\pi}{6}$$

مثال 6: احسب التكامل:

$$I = \int_0^\infty \frac{Cos3x}{x^2 + 1} dx$$

نلاحظ أن $m = 3$ والتابع $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ يحقق شروط الحالة الثالثة ولهذا نختار التابع:

$$F(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2 + 1}$$

وأقطابه المطلوبة فقط القطب:

$$z^2+1=0 \qquad z=+i\in y>0$$

$$\operatorname{Re}s[F(z),i]=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{3iz}}{z^2+1}$$

$$=\frac{e^{3i(i)}}{2i}=\frac{e^{-3}}{2i}$$

$$I=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\left(\frac{1}{2ie^3}\right)\right\}$$

$$I=\frac{\pi}{e^3}$$

مثال 7: احسب التكامل:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^3-1)}$$

نلاحظ أن هذا التمرين ينطبق على الحالة الرابعة عندما يوجد أقطاب تقع على محور السينات وفوقه لهذا نلاحظ ما يلي:

1 . حدود تكامل $(-\infty ، \infty)$.

2 . التابع $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$ تابع كسري جبري بسيط.

ينعدم مقامه من أجل جذور حقيقية وعقدية ودرجة بسطه أقل من درجة مقامه بثلاث درجات.

3 . نختار التابع $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ ونكامل على $\overline{D}$ وهي نصف المستوي العلوي مع محور السينات فنجد:

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left[f(z), a_j \right] + \pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}[f(z), b_j]$$

حيث a_j الأقطاب فوق ox , b_j الأقطاب على ox

$$z^3 - 1 = 0 \to z^3 = 1 = e^{i(2k\pi)}$$

$$z = e^{\frac{2\pi k i}{3}} \qquad k = 0,1,2$$

$$z_0 = 1 \quad , \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \notin \overline{D}$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), 1 \right] = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), e^{i\frac{2\pi}{3}}] = \frac{1}{3} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$I = 2\pi i \left[\frac{1}{3} . e^{-i\frac{4\pi}{3}} \right] + \pi i \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{2\pi i}{3} \left(Cos \frac{4\pi}{3} - i Sin \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{\pi i}{3}$$

$$I = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

مثال 8:

احسب التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+1}dx$

لنحسب التكامل $I_p=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{x^2+1}dx \qquad 0<p<2$

نلاحظ التابع $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ يحقق

$x^p f(x)\to 0$

$x\to 0$

$x\to\infty$

نأخذ $f(z)=\frac{z^{p-1}}{z^2+1}$ أقطابه $z=\mp i$

$$\operatorname{Re}s[i]=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)z^{p-1}}{z^2+1}=\frac{(i)^{p-1}}{2i}$$

$$\operatorname{Re}s[-i]=\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)z^{p-1}}{z^2+1}=\frac{-(-i)^{p-1}}{2i}$$

لنجرِ بعض الإصلاحات:

$$\operatorname{Re}s[i]=-\frac{i(i)^{p-1}}{2}=-\frac{(i)^p}{2}=-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}p}}{2}$$

$$\operatorname{Re}s[-i]=\frac{-(-i)^p}{2}=-\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{2}$$

$$I=-\frac{\pi}{Sinp\pi}.e^{-ip\pi}\left[-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}p}+e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{Sinp\pi}.\left(e^{i\frac{\pi}{2}p}+e^{-i\frac{\pi}{2}p}\right)$$

$$=\frac{\pi}{Sinp\pi}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}p}+e^{i\frac{\pi}{2}p}\right)$$

$$=\frac{\pi}{Sinp\pi}.2Cosp\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{Sinp\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{4/3}=\frac{\pi}{Sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Supplementary Problems (7 – 5 – 1) تمارين إضافية

1 . أوجد رواسب التوابع التالية:

$$F_1(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \quad ; \quad F_2(z) = e^z \csc^2 z$$

$$F_3(z) = \frac{\cot z \coth z}{z^3} \quad ; \quad F_4(z0 = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \qquad t > 0$$

2 . احسب التكامل:

$$I = \oint_{|z|=z} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$$

3. احسب التكاملات الحقيقية التالية:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1} \quad ; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2Cos\theta + Sin\theta}$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + bSin\theta} \qquad a > |b|$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xSin\pi x}{x^2+2x+5} dx$$

$$I_6 = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \qquad 0 < P < 1$$

$$I_7 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos 2\pi x}{x^2 + x + 1}\, dx$$

$$I_8 = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x \;\; + x^2 + 1}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 1}$$




وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل السادس

التطبيقات المطابقة (المحافظة)

Conformal Mapping

التطبيق المطابق:

بفرض $z = x+iy \to w = f(z)$ حيث $f(z) = u+iv$ تابعٌ تحليليٌ في المستوي Z إلى المستوي w معرف على منطقة R_1 ويأخذ قيمه من منطقة R_2 . نلاحظ أن كلاً من قسميه الحقيقي والوهمي v,u تابع لـ y,x (أو θ,r إذا كان $z = re^{i\theta}$) أي:

$$u = u(x,y) \qquad , \qquad v = v(x,y)$$

وهما معادلتان لهذا التطبيق يربطان المستويين Z و W .

إذا قابل كل نقطة من المستوي W نقطة واحدة فقط من المستوي Z نسمي هذا التطبيق تقابل (غامر ومتباين)، وكما نعلم فإن هذا التطبيق يحول بشكل عام منطقة مغلقة من المستوي Z إلى منطقة مغلقة من المستوي W .

فإذا كانت a_{uv} مساحة المنطقة في المستوي Z و $\Delta a_{u,v}$ مساحة المنطقة في المستوي W المقابلة، وإذا كان لكل من v,u مشتقات جزئية مستمرة (وهذا موجود لأن $f(z)$ تحليلي) عندها:

$$\lim_{\Delta a_{xy} \longrightarrow 0} \frac{\Delta a_{u,v}}{\Delta a_{xy}} = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|$$

حيث:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{-\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f`(z)|^2$$

إن المحدد السابق ما هو إلا يعقوبي التطبيق، وعندما نستطيع حل المعادلتين:

$$u = u(x,y) \quad ; \quad v = v(x,y)$$

بالنسبة لـ y, x أي:

$$x = x(u,v) \quad ; \quad y = y(u,v)$$

نحصل على ما يسمى بالتطبيق العكسي أو مقلوب $W = f(z)$ ، وإذا كانت المشتقات الجزئية لـ x و y بالنسبة لـ u, v مستمرة فإن يعقوبي التحويل $W = f(z)$ ويعقوبي التحويل المعاكس يرتبطان بالعلاقة:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

فإذا كان هذا اليعقوبي $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ غير معدوم أي $|f`(z)| \neq 0$ كان التطبيق غير شاذ نسمي النقاط التي ينعدم عندها $f`(z)$ بالنقاط الحرجة.

(1 . 6 . 1): تعريف:

بفرض $W = f(z)$ تطبيق (تقابل) موضعي، وكان Γ_1, Γ_2 منحنيين في المستوي Z الزاوية بينهما α وصورتهما $\Gamma`_1, \Gamma`_2$ في المستوي W، وكانت الزاوية بينهما α أيضاً سمينا $W = f(z)$ تطبيقاً مطابقاً (محافظاً).

(2 . 6 . 1): نظرية:

إذا كان $W = f(z)$ تحليلياً هو ومشتقه $f`(z) \neq 0$ في المنطقة R من المستوي العقدي فهو تطبيق مطابق.

البرهان:

نعلم أن:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{W - W_0}{z - z_0} = f`(z_0)$$

ولهذا فإن:

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{W - W_0}{z - z_0} \right| = \left| f`(z_0) \right|$$

$$\lim_{z \to z_0} \arg \frac{W - W_0}{z - z_0} = \arg f`(z_0)$$

$$\lim_{z \to z_0} \arg(W - W_0) - \lim_{z \to z_0} (z - z_0)$$

$$= \arg f`(z)$$

نلاحظ من الشكل على المنحنين $\Gamma_1, \Gamma`_1$:

$$\varphi_1 - \theta_1 = \arg f`(z_0)$$

على $\Gamma_2 , \Gamma`_2$

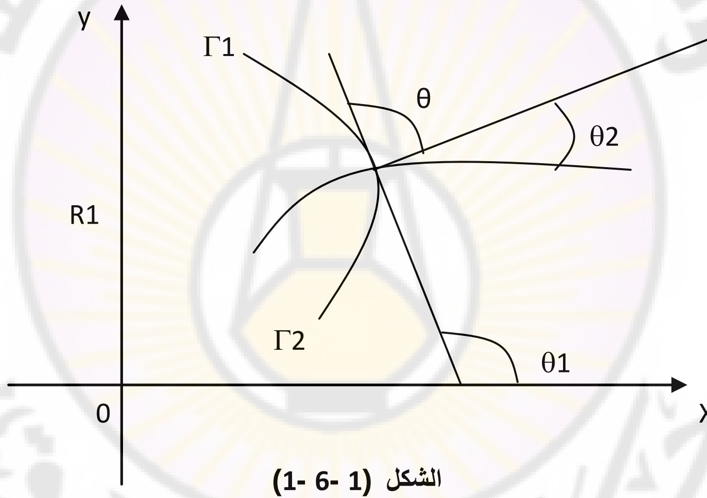
$$\varphi_2 - \theta_2 = \arg f`(z_0)$$

ومنه:

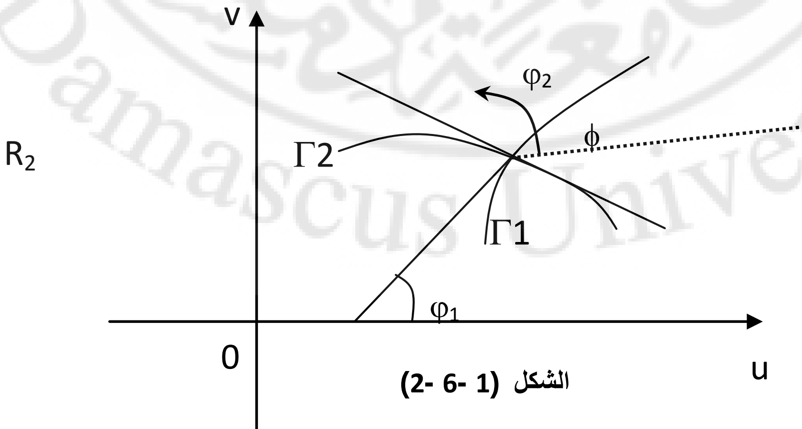
$$\varphi_1 - \theta_1 = \varphi_2 - \theta_2$$

$$\phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \varphi$$

أي التطبيق يحافظ على الزوايا فهو مطابق.



الشكل (1 -6 -1)



الشكل (1 -6 -2)

(1 . 6 . 3): بعض المحولات (التطبيقات المطابقة) العامة:

1 . تطبيق الانسحاب:

هو التطبيق المعرف كما يلي:

$$z = x + iy = re^{i\theta} \rightarrow w = f(z) = u + iv$$

$$W = z + z = \rho e^{i\phi}$$

نلاحظ أن هذا التطبيق هو تطبيق مطابق حسب النظرية السابقة، فهو تحليلي لأنه كثير حدود من الدرجة الأولى ومشتقه لا ينعدم، ولهذا؛ الأشكال الناتجة بانسحاب هي أشكال متشابهة.

2 . تطبيق الدوران:

يعرف هذا التطبيق كما يلي:

$$z \rightarrow W = f(z) = e^{i\theta_0}.z$$

أيضاً هذا التطبيق هو تطبيق مطابق والأشكال الناتجة عنه تدور بزاوية θ_0 (عكس عقارب الساعة) وعندما $\theta_0 < 0$ يتم ذلك وفق عقارب الساعة.

3 . تطبيق التحاكي:

وهو التطبيق التالي:

$$z \rightarrow W = f(z) = az$$

الأشكال الناتجة عن هذا التطبيق المطابقة هي أشكال متحاكية (متشابهة) وبالاتجاه المباشر لـ z عندما $a > 1$ وعكس ذلك عندما $a < 1$.

4 . التطبيق العكوس:

$$z \to f(z) = \frac{1}{z} \qquad z \neq 0$$

وهو أيضاً تطبيق مطابق.

5 . التطبيق الخطي:

$$z \to W = f(z) = \alpha z + \beta$$

ونلاحظ أنه باختيار مناسب لـ β, α نحصل على هذا التطبيق من تحاك وانسحاب.

6 . التطبيق ثنائي الخطية:

$$z \to f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

بشرط $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$

وهذا التطبيق أيضاً مطابق وهو يمثل كل التطبيقات السابقة باختيار مناسب للثوابت.

7 . تطبيق نصف المستوي العلوي على دائرة الوحدة:

يعرف هذا التطبيق كما يلي:

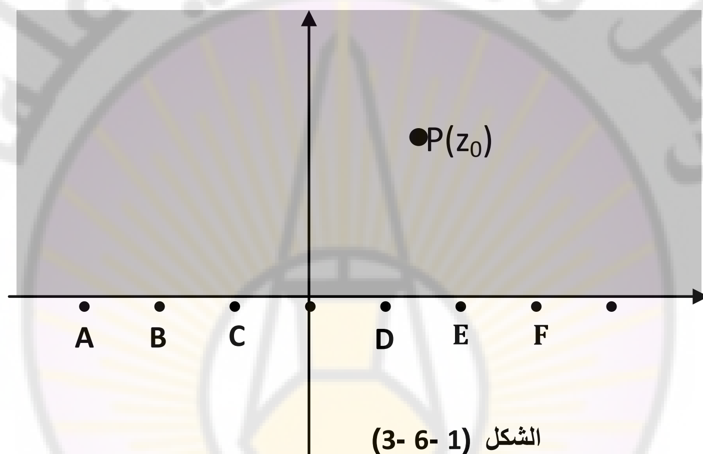
$$z \to W = f(z) = e^{i\theta_0} \left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \right)$$

نلاحظ في هذا التطبيق أن النقاط الواقعة فوق محور السينات تقابل بنقاط داخلية في دائرة الوحدة أما النقاط الواقعة على محور السينات فصورها تقع على محيط هذه الدائرة.

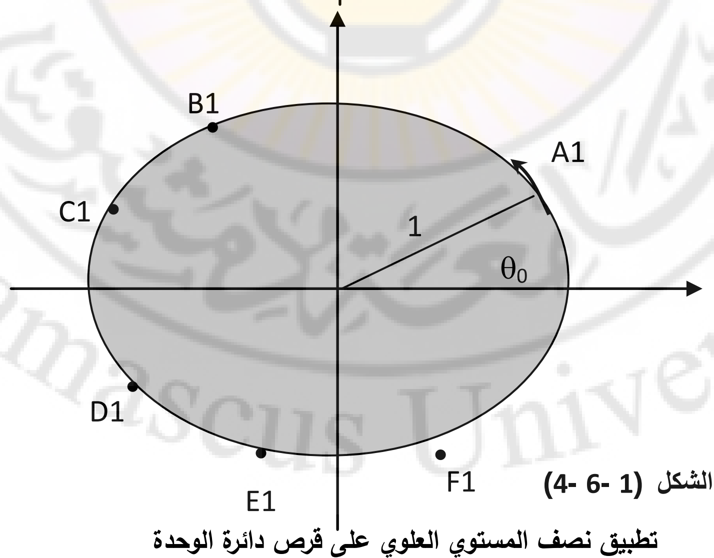
للبرهان على ذلك يكفي أن نبرهن أن $|W|<1$ من أجل النقاط الواقعة فوق محور السينات، و $|W|=1$ من أجل النقاط الواقعة على محور السينات.

ملحوظة:

إن المضلعات الصغيرة تقابل بمضلعات مشابهة بها أما المضلعات الكبيرة فلا تنطبق عليها هذه الخاصة والتطبيق الأخير يشهد بذلك.



الشكل (1- 6- 3)



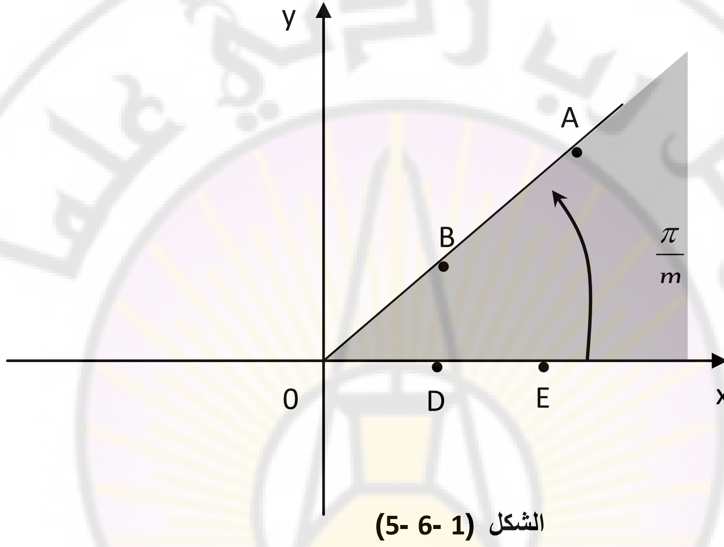
الشكل (1- 6- 4)

تطبيق نصف المستوي العلوي على قرص دائرة الوحدة

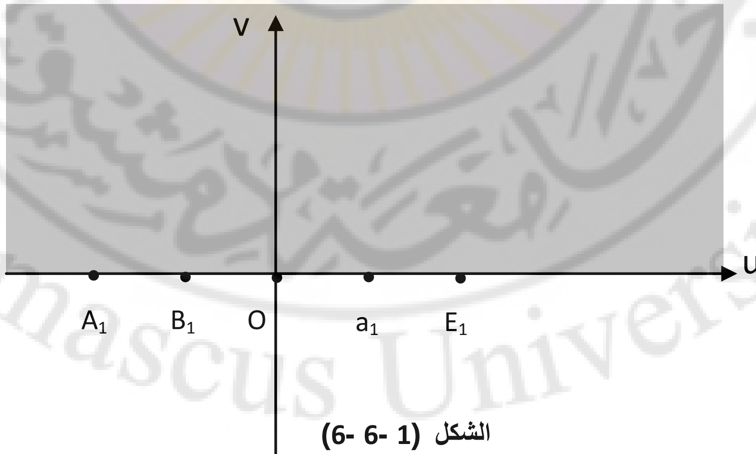
بعض التطبيقات الخاصة:

1 . تطبيق قطاع من مستوٍ زاويته الرأسية $\frac{\pi}{m}$ على نصف المستوي العلوي:

$z \to w = f(z) = z^m$



الشكل (1 -6 -5)



الشكل (1 -6 -6)

تطبيق قطاع زاوي $\frac{\pi}{m}$ على نصف المستوي العلوي

2 . تطبيق شوارتز . كرستوفل:

بفرض $w_1....w_n$ مضلع في المستوي W زواياه الداخلية $\alpha_1\alpha_2 \to \alpha_n$ ويحد منطقة R ، ولنفرض أيضاً أن النقاط ....$w_1........w_n$ تمثل أشعة في المستوي W وهي تقابل النقاط $x_1..............x_n$ الواقعة على المحور الحقيقي في المستوي Z .

إن هذا التطبيق الذي يطبق ذلك المضلع على النصف العلوي من المستوي Z هو يحقق مايلي:

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha 1}{\pi}-1}(z - x_2)^{\frac{\alpha 2}{\pi}-1}.............(z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$$

$$W = A\int(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}}............(z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}dz + B$$

حيث B, A ثوابت.

يلزم أن نلاحظ:

1 . يمكن اختيار أي ثلاث نقاط من ....$x_1,...........x_n$ كما نريد.

2 . إن الثابتين B, A يحددان حجم وموضع واتجاه المضلع $w_1.........w_n$.

3 . من المفيد اختيار إحدى النقاط $x_1..........x_n$ في اللانهاية ولتكن x_n عندها يحذف العامل $(z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$ من العلاقتين $W, \frac{dw}{dz}$

4 . المضلع المفتوح غير المنتهي يمكن اعتباره كنهاية لمضلع مغلق.

البرهان على علاقة تطبيق شوارتز . كرستوفل:

لأجل هذا يلزم التطبيق الحاصل من العلاقة:

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1}$$

يطبق مضلع معطى في المستوي W على داخل المحور الحقيقي من المستوي Z (أضلاع المضلع).

من العلاقة $\frac{dw}{dz}$ نجد:

$$\arg dw = \arg dz + \arg A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)\arg(z - x_1) + \ldots.. + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right)\arg(z - x_n)$$

عندما تتحرك z على ox من يسار x_1 على يمين x_1 عندها تتحرك W على المضلع (على ضلع المضلع) باتجاه W_1 ، وعندما تعبر x_1, z من اليسار إلى اليمين فإن $\theta_1 = \arg(z - x_1)$ تتغير من π إلى o بينما كل الحدود الأخرى $(z - x_2)\ldots\ldots\ldots(z - x_n)$ تبقى ثابتة، وبهذا نجد أن $\arg dw$ يزداد بـ $\left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)\pi = \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)\arg(z - x_1)$ أي بـ $\alpha_1 - \pi$ ، ويحدث نفس التغير بالنسبة لبقية العوامل عند المرور عبر $x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ [بعكس اتجاه عقارب الساعة (وذلك على المضلع)].

5 . برهن أن مجموع العوامل:

$$\left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) \quad , \quad \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) \quad , \quad \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right)$$

الواردة في تطبيقات كرستوفل . شوارتز من أجل أي مضلع مغلق تساوي 2- .

إن مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع مغلق يساوي 2π وبالتالي:

$$(\pi - x_1) + (\pi - \alpha_2) + ... + (\pi - \alpha_n) = 2\pi$$

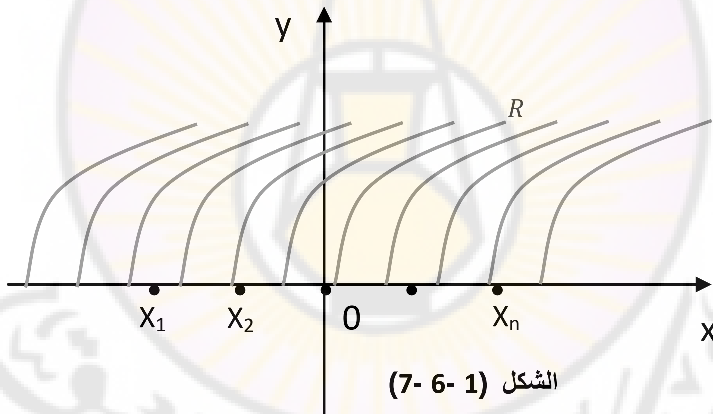
نقسم على $-\pi$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) + ...\left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right) = -2$$

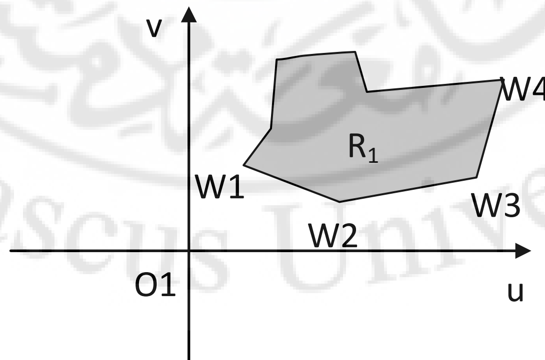
6 . لنفرض في تطبيق شوارتز . كرستوفل أن $x_n = \infty$ عندها من العلاقة:

$$\frac{dw}{dz} = A(z - \alpha_1)^{\frac{\alpha 1}{\pi} - 1} ....(z - x_n)^{\frac{\alpha n}{\pi} - 1}$$

لنفرض $A = K/ \ (-x_n)^{\left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right)}$ ، حيث K ثابت.



الشكل (1 -6 -7)



الشكل (1 -6 -8) تطبيق شوارتز . كرستوفل

وبإخراج $-x_n$ من العامل الأخير خارج قوس نجد:

$$\frac{dw}{dz} = K(z - x_1)^{\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots(z - x_{n-1})^{\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1\right)} \left(\frac{x_n - z}{x_n}\right)$$

وعندها $x_n \to \infty$ نجد:

$$\frac{dw}{dz} = K(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(z - x_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}-1}$$

7 . $z \to w = f(z) = e^{\frac{\pi z}{a}}$

مثلاً:

$$A(x+ia) \to e^{\frac{\pi(x+ia)}{a}} = -e^{\frac{\pi x}{a}}$$

8 . التطبيق:

$$z \to W = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$B \approx z = -1 \to B_1 = a$$

$$D \approx z = 1 \to D_1 = a$$

$$C \approx z = iy \to C_1 = 0$$

أمثلة وتمارين (1 – 6 – 4) *Solved Problems*

1 . ليكن R المستطيل المعين في المستوي Z بالشكل:

$x = y = 0 \qquad x = 2 \qquad y = 1$

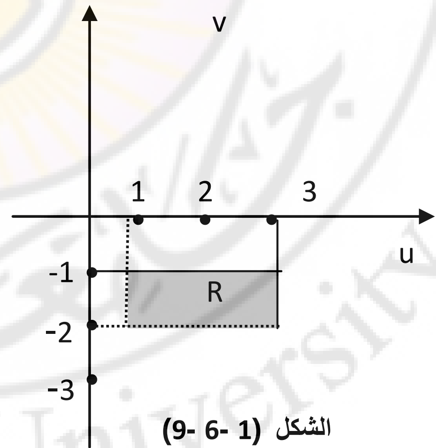
أوجد النطاق R_1 المقابل لـ R وفق التطبيقات التالية:

أ . $W_1 = z + 1 - 2i$

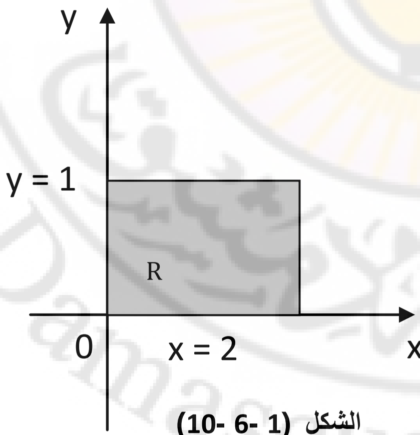
ب . $W_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z$

ج . $W_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z + 1 + 2i$

الحل:



الشكل (1 -6 -9)



الشكل (1 -6 -10)

أ . نلاحظ:

$$W_1 = x+1+i(y-2) \qquad u = x+1 \qquad v = y-2$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1; y = 0 \Rightarrow v = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 3; y = 1 \Rightarrow v = -1$$

ب .

$$W_2 = u+iv = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z$$

$$= x-y+i(x+y)$$

$$u = x-y \qquad v = x+y$$

$$x = 0 \Rightarrow u = -v$$

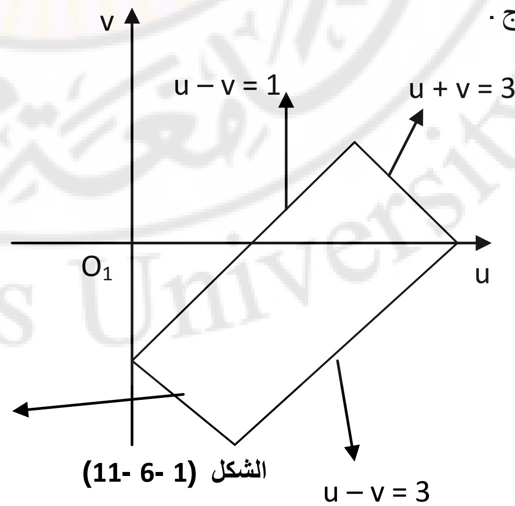
$$y = 0 \Rightarrow u = v$$

$$x = 2 \Rightarrow u+v = 4$$

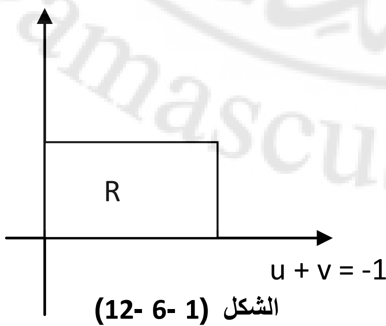
$$y = 2 \Rightarrow v-u = 2$$

ج .

$$W_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} + z(1-2i)$$



الشكل (1 -6 -11)



الشكل (1 -6 -12)

نلاحظ أن:

$$u = x - y + 1 \qquad v = x + y - 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u + v = 1 \quad u - v = 3$$

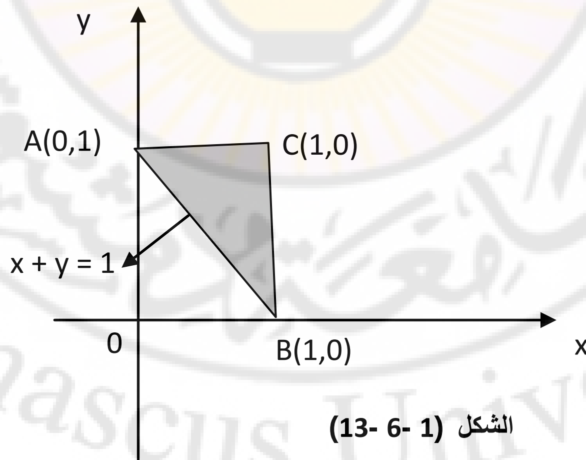
$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u + v = 3 \quad u - v = 1$$

2 . عين المنطقة المقابلة للمنطقة:

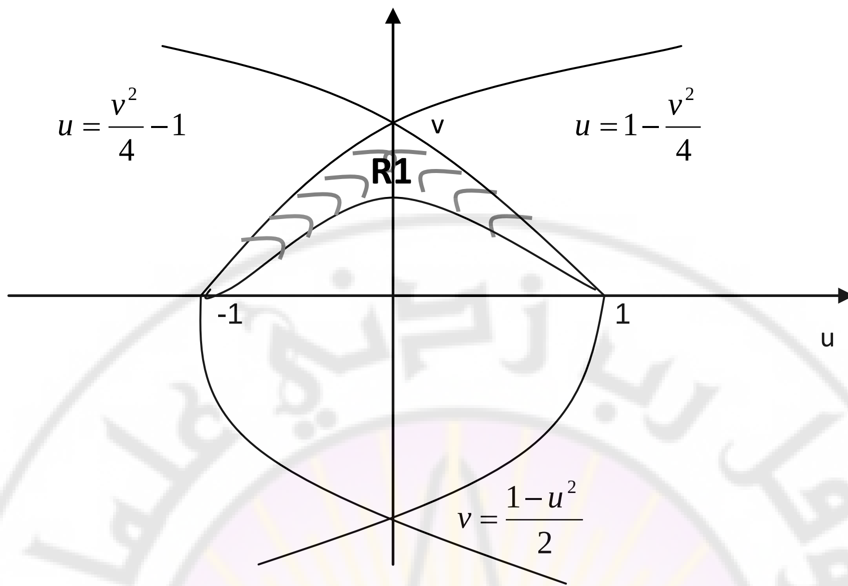
$$R : x = 1$$
$$y = 1; x + y = 1$$
$$w = z^2$$

وفق التطبيق:

$$W = u + iv = (x + iy)^2$$



الشكل (1 -6 -13)



الشكل (1 -6 -14)

الحل:

$$=x^2-y^2+2ixy$$

$$u=x^2-y^2 \qquad v=2xy$$

$$x=1\Rightarrow u=1-y^2 \quad v=2y$$

ومنه $u=1-\frac{v^2}{4}$

$$y=1\Rightarrow u=x^2-1 \quad v=2x$$

ومنه $u=\frac{v^2}{4}-1$

$$x+y=1\Rightarrow y=1-x\Rightarrow u=x^2-(1-x)^2\,2x-1$$

$v = 2x(1-x) = 2x - 2x^2$

ومنه $v = \frac{1}{2}(1-u^2)$

3 . أوجد التطبيق ثنائي الخطية الذي ينقل النقاط:

$Z_1 = 0 \quad , \quad Z_2 = -i \quad , \quad Z_3 = -1$

إلى النقاط: $W_1 = i, \quad W_2 = 1, \quad W_3 = 0$ على الترتيب.

الحل:

$$W = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

$$W_1 = \frac{\alpha(0) + \beta}{\gamma(0) + \delta} = i \qquad \beta = i\delta$$

$$W_2 = \frac{\alpha(-i) + \beta}{\lambda(-1) + 8} = 1 \qquad -i\gamma + \delta = -i\alpha + \beta$$

$$W_3 = \frac{\alpha(-1) + \beta}{\gamma(-1) + \delta} = 0 \qquad \alpha = \beta$$

وبحل جملة المعادلات السابقة نجد أحد المجاهيل اختيارياً وليكن α عندها نجد:

$$\beta = \alpha, \quad \delta = -i\alpha \quad , \quad \gamma = i\alpha$$

$$W = -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

4 . أوجد النقاط غير المتغيرة في التطبيق التالي:

$$W = \frac{2z-5}{z+4}$$

الحل:

النقطة الثابتة تحقق $z \to z$

$$z = \frac{2z-5}{z+4}$$

$$z^2 + 4z = 2z - 5$$

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$

$$z_1 = -1 - 2i \qquad z_2 = -1 + 2i$$

النقاط الثابتة هي z_2, z_1

5. ليكن Γ منحنياً في المستوي Z معطى بشكل وسيطي $x = f_1(x), y = f_2(t)$ برهن أن هذا المنحني يمكن أن يطبق على محور السينات وفق التطبيق:

$$Z = f_1(w) + if_2(w)$$

لنفرض $z = x + iy$ و $W = u + iv$

عندها نجد:

$$x + iy = f_1(u + iv) + if_2(u + iv)$$

من أجل محور السينات $v=0$

$$x+i4= f_1(u)+if_2(u)$$

أي:

$$y= f_2(u) \quad x= f_1(u)$$

وهي تمثل معادلة المنحني Γ .

تطبيق:

لنفرض $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ قطع ناقص في المستوي Z ، عندها هناك تطبيق يطبق هذا القطع على محور السينات وهذا التطبيق هو:

التمثيل الوسيطي للقطع هو $x=aCost$ ، $y=bS\text{int}$

إذاً التطبيق المطلوب:

$$z=a\cos w+ib\, Sinw$$

تمارين إضافية (1−6−5) Supplementary Problems

1 . ليكن لدينا المثلث Δ في المستوي Z المعين بالأشعة $i, 1-i, 1+i$

أوجد صورته Δ_1 وفق التطبيقات:

$$W_1 = 3z + 4 - 2i \;; \qquad W_2 = iz + 2 - i \;; \qquad W_3 = 5e^{i\frac{\pi}{3}} z - 2 + 4i$$

2 . أوجد صورة المثلث Δ السابق الذكر في المسألة السابقة وفق التطبيقات:

$$W_1 = z^2 \;; \qquad W_2 = iz^2 + (2-i)z \;; \quad W_3 = z + \frac{1}{z}$$

3 . بيّن أن التطبيق:

$$z \to W = ze^{-\alpha} + z^{-1}e^{\alpha}$$

حيث α حقيقي ينقل داخل الدائرة $|z| = 1$ إلى خارج قطع ناقص.

4 . عين صورة المستقيم $x + y = 1$ في المستوي Z وفق التطبيقات:

$$W_1 = z^2 \quad , \qquad W_2 = \frac{1}{z}$$

5 . أوجد التطبيق الخطي (ثنائي الخطية) الذي يقابل النقاط:

$$z_1 = i \quad , \quad z_2 = -1 \quad , \quad z_3 = 1$$

بالنقاط:

$$W_1 = 0 \quad , \qquad W_2 = 1 \quad , \quad W_3 = \infty$$

الباب الثاني

تحليل فورييه ـ التوابع الخاصة ـ تحويلات لابلاس

Functions Expansion using Fourier series and integral

Special Functions

Laplace Transforms


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University

الفصل الأول

نشر الدوال (التوابع) وسلسلة فورييه وتكامل فورييه

Functions Expansion according to Fourier series and integral

تمهيد :

وجدنا من خلال دراستنا للتحليل الرياضي أنه يمكن نشر الدوال (التعبير عن تابع ما وفق توابع أبسط منه) وفق سلسلة تايلو ر (أو ماك لوران) وذلك ضمن شروط خاصة (متعلقة بالاستمرار والاشتقاق) تحققها الدوال ومشتقاتها. واجه العلماء نتيجة أبحاثهم ضرورة نشر بعض التوابع التي لا تحقق هذه الشروط وخاصة في مجال الهندسات بفروعها المختلفة ، ولقد استطاع العالم الفرنسي جوزيف فورييه (1768 . 1830) وذلك عند دراسة مسألة انتقال الحرارة تمثيل بعض من هذه التوابع (محققة لشروط خاصة سنعرفها لاحقاً) وفق سلسلة دوال بسيطة مثلثاتية.

(2 . 1 . 1) تعريف:

نقول عن دالة (التابع) $f(x)$ معرفة على الفترة $]\alpha,\beta[$ إنها ملساء إذا كانت مستمرة ، وكان مشتقها $f'(x)$ مستمراً على الفترة $]\alpha,\beta[$ ، أما إذا كانت $f(x)$ معرفة على فترة $]\alpha,\beta[$ يمكن تقسيمها إلى عدد منتهٍ من الفترات بحيث تكون $f(x)$ ملساءَ على كل فترة، عندها فإن $f(x)$ تسمى ملساء قطعياً.

ملحوظة (1): نسمي النقطة شاذة على منحني دالة تلك النقطة التي لا يكون المشتق الأول فيها موجوداً ، أو أن التابع يكون فيها غير معرف ، وهناك أنواع كثيرة للنقاط الشاذة نذكر منها النقاط المضاعفة والمنعزلة ونقاط التراجع (يمكن التعرف على هذه النقاط من أي كتاب في التحليل الرياضي ورسم الدوال).

(2 . 1 . 2)تعريف:

تكون الدالة التابع $f(x)$ دالة دورية إذا حققت الشرط $F(x) = F(x+nT), \quad n \in Z$

حيث T عدد حقيقي وZ مجموعة الأعداد الصحيحة.

(2 .1 .3)تعريف:

نقول عن تابع $F(x)$ إنه يحقق شروط ديرخليه إذا حقق ما يلي:

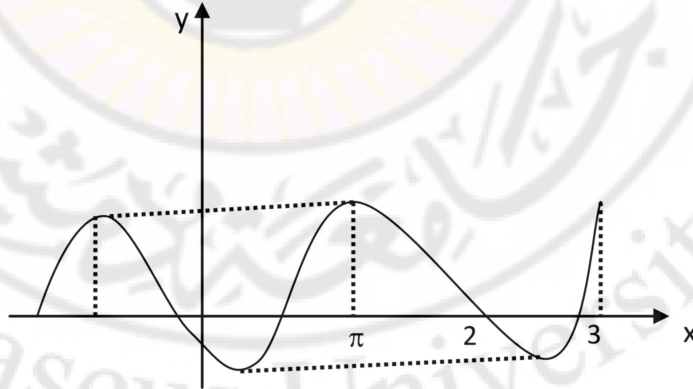
1 . $F(x)$ معرف على الفترة:

$$c < x < c+2l \quad ; \quad c > 0$$

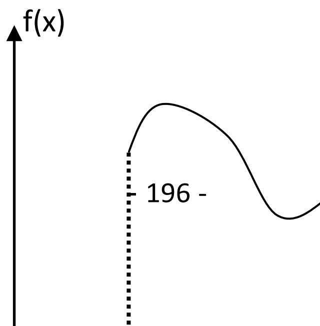
2 .($F`(x), F(x)$) مستمران جزئياً (مقطعياً) على $]c, c+2l[$ (*Piecewise Continuous*).

3 . ($F(x) = F(x+k(2l))$) حيث k عدد صحيح.

خطوط بيانية لتوابع مستمرة ومستمرة قطعياً:



الشكل (2 -1 -1) دالة ملساء قطعياً ومستمرة



الشكل (2 -1 -2)

ﺧﻬﺏ ﻟﻜﺰﺉ؟ ﻟﺰﺓﻟﺐ

لقد أكد فورييه إن التابع المحقق لشروط ديرخليه يمثل وفق السلسلة:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\left(\frac{n\pi}{l}\right)x+b_n Sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)x \qquad (2\text{-}1)$$

حيث $c< x < c+2l$ (قد توجد نقاط انقطاع)،وإن الثوابت b_n , a_n , a_0 تعطى بالعلاقات:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\, Cos(\frac{n\pi}{l})xdx \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\, Sin(\frac{n\pi}{l})xdx \end{aligned}\right\}\ldots\ldots \qquad (2\text{-}2)$$

وأما في نقاط الانقطاع فيمكن أن يعرف $F(x)$ كما يلي:

$$\frac{1}{2}\{F(x+0)-F(x-0)\}$$

حيث x نقطة الانقطاع (من النوع الأول) والمقصود $x+0$ أي السعي إلى x من ناحية اليمين، و $x\text{-}0$ تعني السعي لـ x من ناحية اليسار ، وفي المسائل نختار الثابت c بحيث تنطبق حدود التكامل في العلاقات (2.2) على بداية ونهاية الفترة (فترة الدور).

إثبات ادعاء فورييه:

لنكامل العلاقة (1.1) على فترة الدور $T = 2l$:

$$\int_{c}^{c+2l} F(x)\,dx = \int_{c}^{c+2l} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c}^{c+2l} a_n Cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c}^{c+2l} b_n Sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

وبملاحظة أن دور كل من $Cos\frac{n\pi}{l}x$ و $Sin\frac{n\pi}{l}x$ هو $T = \frac{2l}{n}$ نجد أننا نكاملها ضمن مضاعفات الدور $2l$ وبالتالي:

$$a_n \int_{c}^{c+2l} Cos\frac{2\pi}{l}xdx = b_n \int_{c}^{c+2l} Sin\frac{n\pi}{l}xdx = 0$$

لهذا نجد:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x)\,dx$$

ومنه:

$$= \int_{c}^{c+2l} F(x)dx = \frac{a_0}{2}[x]_{c}^{c+2l}$$

كذلك، لنضرب العلاقة (2.1) بـ $Cos\frac{m\pi}{l}x$ ثم نكامل على فترة الدور فنجد:

$$\int_{c}^{c+2l} F(x)\cos\frac{m\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_c^{c+2l}\cos\frac{m\pi}{l}xdx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_c^{c+2l}\cos\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_c^{c+2l}Sin\frac{n\pi}{l}x\,Cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

نلاحظ أن:

$$a_0\int_c^{c+2l}\cos\frac{m\pi}{l}xdx=0$$

لأنه تكامل تابع مثلثاتي على مضاعفات الدور:

$$b_n\int_c^{c+2l}Sin\frac{m\pi}{l}xCos\frac{m\pi}{l}xdx=\frac{b_n}{2}\int_c^{c+2l}[Sin(n+m)\frac{\pi}{l}x+Sin(n-m)\frac{\pi}{l}x]dx$$

$$=\frac{b_n}{2}\int_c^{c+2l}Sin(n+m)\frac{\pi}{l}xdx+\frac{b_n}{2}\int_c^{c+2l}Sin(n-m)\frac{\pi}{l}xdx=0$$

لأن كلاً منهما تكامل تابع دوري على مضاعفات الدور ويساوي الصفر.

$$a_n\int_c^{c+2l}Cos\frac{m\pi}{l}x\quad Cos\frac{n\pi}{l}xdx=$$

$$\frac{a_n}{2}\int_c^{c+2l}[Cos(m+n)\frac{\pi}{l}xdx+\frac{a_n}{2}\int_c^{c+2l}Cos(m-n)\frac{\pi}{l}xdx$$

التكامل الأول معدوم لأنه تكامل تابع دوري على فترة مضاعفات الدور ، أما التكامل الثاني فهو كذلك إلا عندما $m = n$ عندها يصبح مساوياً لـ:

$$\frac{a_n}{2}\int_c^{c+2l}Cos(0)dx=\frac{a_n}{2}[x]_c^{c+2l}=a_nl$$

ومنه:

$$a_nl=\int_c^{c+2l}F(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=$$

أي:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

وهي العلاقة المطلوبة.

بنفس الطريقة لو ضربنا العلاقة (2.1) بـ $Sin\frac{m\pi}{l}$ ثم كررنا ما سبق نحصل على:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x)Sin\frac{n\pi}{l}dx$$

ملحوظة (1):

نسمي الثوابت المحسوبة في العلاقات (2.2) بثوابت أولر وفيها *n= 1,2,3*،....

ملحوظة (2):

إن شروط ديرخليه هي شروط كافية للنشر وغير لازمة.

<u>حالة خاصة:</u>

عندما يكون دور الدالة $T = 2\pi$ يصبح شكل سلسلة فورييه كما يلي:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cosnx + b_n Sin\ nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi} F(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi} F(x)Conxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{c}^{c+2\pi} F(x) Sin\ nx\ dx$$

(4. 1. 2): الدوال الفردية والدوال الزوجية ونشر فورييه:

(ما يسمى النشر على نصف الدور) [*Half Range Expansion*]

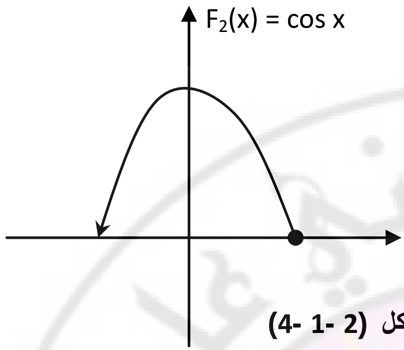
نسمي الدالة $F(x)$ المعرفةعلى فترة متناظرة بالنسبة لـoy دالة زوجية إذا حققت العلاقة:

$$\forall \quad x \in]-l, l[\quad ; \quad F(x) = F(-x)$$

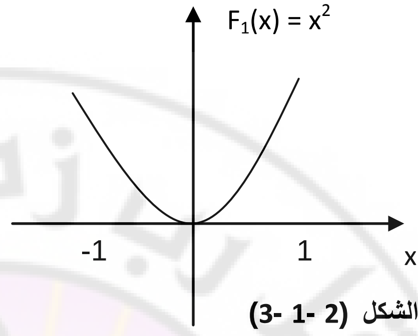
ونسميها دالة فردية إذا حققت العلاقة:

$$\forall \quad x \in]-l, l[\quad ; \quad F(x) = -F(-x)$$

بعض بيانات دوال فردية أو زوجية



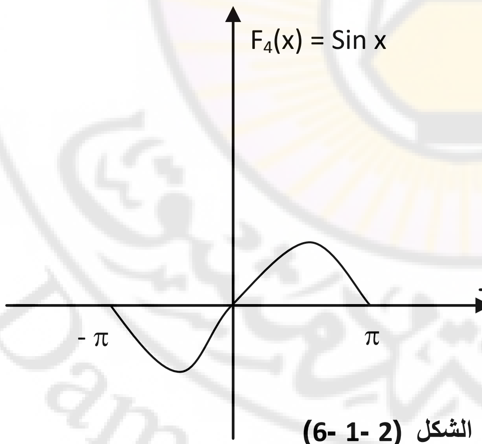
الشكل (2 -1 -4)



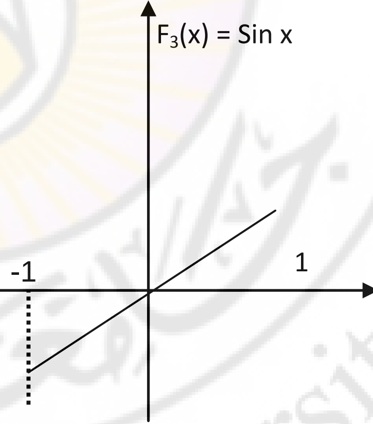
الشكل (2 -1 -3)

f_2, f_1 تابعان زوجيان $\quad f_2(x) = \cos x \qquad f1(x) = x^2$

$$\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \qquad -1 \leq x \leq 1$$



الشكل (2 -1 -6)



الشكل (2 -1 -5)

$$f_4(x) = Sinx \qquad f_3(x) = x$$

$$-\pi \leq x \leq \pi \qquad -1 \leq x \leq 1$$

هناك دوال معرفة على مجال متناظر غير فردية وغير زوجية مثل:

$$F(x) = x^2 + 1 + x$$

لكن كل دالة معرفة على مجال متناظر هي مجموع دالتين إحداهما فردية والأخرى زوجية

$$F(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2} + \frac{F(x) - F(x)}{2}$$

نلاحظ أيضاً أنه إذا كان التابع $F(x)$ زوجياً فإن:

$$\int_{-l}^{l} F(x) \, Sin\frac{n\pi}{l}xdx = 0$$

أي أن سلسلة فورييه للتابع الزوجي لا تحوي حدوداً بـ $Sin\frac{n\pi}{l}x$ كذلك بنفس الطريقة إذا كان

$F(x)$ تابعاً فردياً فإن:

$$\int_{-l}^{l} F(x)dx = \int_{-l}^{l} F(x) \, Cos\frac{n\pi}{l}xdx = 0$$

والسلسلة الناتجة (سلسلة فورييه) لا تحوي حداً ثابتاً ولا حدود فيها $Cos\frac{n\pi}{l}x$.

مما سبق يمكننا عمل التالي:

ليكن $F(x)$ تابعاً ما معرفاً على الفترة $(0,l)$ عندها يمكننا نشر هذا التابع وفق سلسلة جيوب فقط أو وفق سلسلة جيوب تمام وفق الطريقة الآتية:

ملاحظة: التابع $F(x)$ قد لا يكون دورياً (ولكننا نستطيع تحويله إلى تابع دوري).

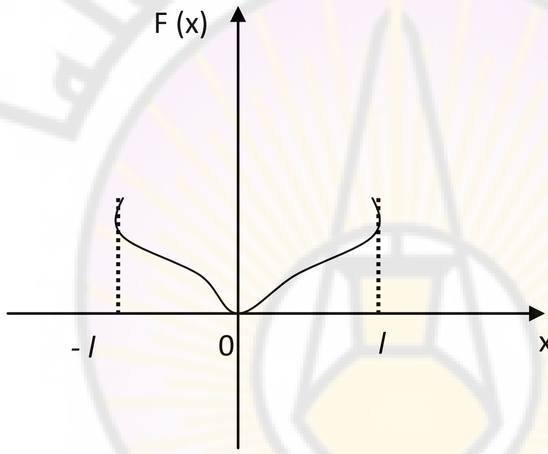
1 . النشر وفق سلسلة جيوب تمام:

لنفرض أن $F(x)$ تابع ما غير دوري معرف على الفترة $(0,l)$ ولنفرض أننا نريد النشر وفق فورييه بحيث إن السلسلة لا تحوي إلا حدوداً فيها جيوب تمام، عندها نقوم بالعملية التالية:

لنمدد التابع $F(x)$ المعرف على الفترة $(0,l)$ليصبح معرفاً على الفترة $(-l,l)$ بالشكل التالي:

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & 0 < x < l \\ F(-x) & -l < x < 0 \end{cases}$$

عندها نجد أن الدالة $F_1(x)$ هي دالة زوجية وهي تحقق شروط فورييه فرضاً (فيما إذا اعتمدنا أن $2l$ هو دور الدالة $(F_1(x)$ وعندها وحسب نشر فورييه نجد:



الشكل (2 -1 -7)

$$F_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1=n}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi}{l} x$$

$-l < x < 0$ أو $0 < x < l$

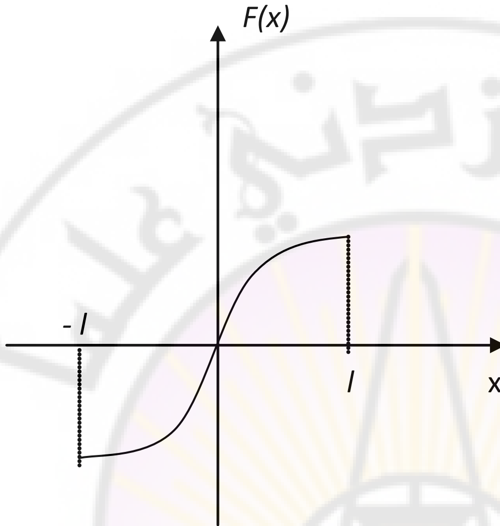
وبما أن $F_1(x) = F(x)$ على الفترة $(0,l)$ لهذا يكون:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1=n}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi}{l} x \qquad (2-3)$$

2 . النشر وفق سلسلة جيوب:

لنفرض $F(x)$ تابع معرف على $(0,l)$ ونريد نشره وفق فورييه وهو غير دوري، عندها نحدد هذا التابع على الفترة $(-l,l)$ كما يلي:

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) \leftarrow 0 < x < l \\ -F(x) \leftarrow -l < x < 0 \end{cases}$$



الشكل (2 -1 -8)

نلاحظ أن التابع الجديد $F_1(x)$ هو تابع فردي عملاً؛ لهذا إذا افترضنا أنه دوري ودوره $2l$ نجد أنه يمكن نشره وفق فورييه (بفرض أن $F(x)$ ومشتقه مستمران مقطعياً) وذلك وفق سلسلة جيوب لأنه فردي، وبالتالي يكون:

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi}{l} x$$

$-l < x < 0$ أو $0 < x < l$

وبما أن $F(x)$ يطابق $F_1(x)$ على الفترة $(0,l)$ عندها يكون:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi}{l} x \dots\dots\dots\dots(2-4)$$

على الفترة $0 < x < l$

☜ **ملحوظة:**

في التوابع الزوجية يكون بيان التابع متناظراً بالنسبة لمحور العينات، أما في حالة التوابع الفردية فإن البيان يكون متناظراً بالنسبة للمبدأ.

(5.1.2): النشر العقدي لسلسلة فورييه:

لقد وجدنا أن التابع $F(x)$ المحقق لشروط ديرخليه (الكافيةٍ) يمكن تمثيله وفق سلسلة فورييه كما يلي:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\pi}{l}x+b_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

وذلك على فترة دور التابع $F(x)$.

إذا استخدمنا علاقات أولر الرابطة بين التوابع المثلثاتية والأسية نجد:

$$Sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}-e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2i}$$

$$Cos\frac{n\pi}{l}x=\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}+e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2}$$

نبدل في سلسلة فورييه:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}+e^{-i\frac{n\pi}{l}}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{l}x}-e^{-i\frac{n\pi}{l}x}}{2i}\right)\right]$$

$$F(x)=\frac{a_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{l}x}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}$$

إذا استخدمنا الاصطلاحات التالية:

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} \\ C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ C_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2-5)$$

نجد:

$$F(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} + C_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{l}x}$$

أي:

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2-6)$$

وهو نشر فورييه العقدي.

حتى يتم النشر يلزم تعيين C_n نلاحظ من علاقات تعريف C_0 , C_n , C_{-n} أن:

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x) Cos\frac{n\pi}{l} x dx - \frac{i}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x) Sin\frac{n\pi}{l} x dx\right\}$$

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{c}^{c+2l} F(x)\left[\cos\frac{n\pi}{l}x - i\sin\frac{n\pi}{l}x\right] dx$$

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{c}^{c+2l} F(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}s} dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2-7) \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots.$$

إن العلاقات (2.5) تسمح بالانتقال من النشر الحقيقي إلى النشر العقدي، ويمكننا الانتقال أيضاً من النشر العقدي إلى الحقيقي بملاحظة أن:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 2C_0 \\ a_n &= C_n + C_n \\ b_n &= i(C_n - C_{-n}) \end{aligned}\right\} \text{...........}(2-8)$$

(6.1.2): التحليل التوافقي (*Harmonic Analysis*):

كما نعلم فإن الكثير من الظواهر الفيزيائية تمثل وفق توابع دورية، ومثل هذه التوابع كما رأينا يمكن تمثيلها بسلسلة فورييه، ومن جهة أخرى يمكن التعبير عن التوابع الدورية بدلالة اهتزازات مختلفة التواتر، حيث تختلف هذه التواترات بأمثال صحيحة لتواتر إحداها، ومثل هذا التمثيل الأخير يسمى تحليلاً توافقياً للتابع الدوري. سنرى أن هناك توافقاً بين التحليل التوافقي وسلسلة فورييه.

يسمى التمثيل الآتي لتابع ما $F(x)$ بالتمثيل التوافقي:

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos(n\omega x - \phi_n) \text{...................}(2-9)$$

حيث نسمي $A_1 \cos(wx - \phi_1)$ التوفيقة الأولى وسعتها A_1 بالتعريف وفرق طورها ϕ_1 وكذلك $A_2 Cos(2wx - \phi_2)$ التوفيقة الثانية وسعتها A_2 وفرق طورها ϕ_2 وهكذا...........

لقد نتجت هذه التسميات من علم الصوت، وسميت أيضاً مدروجات في علم الموسيقا.

سنرى الآن كيف يمكن الانتقال من التحليل التوافقي إلى سلسلة فورييه والعكس:

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[Cosn\omega x Cos\phi_n + Sinn\omega x Sin\phi_n \right]$$

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos\phi_n n\omega x + A_n Sin\phi_n Sinnwx$$

فإذا افترضنا أن:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad a_n = A_n Cos\phi_n \qquad b_n = A_n Sin\phi_n$$

عندها نجد:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1=n}^{\infty} a_n Cosnwx + b_n Sin\, nwx$$

وهو نشر فورييه الذي نعلمه.

وبالعكس يمكن الحصول من نشر فورييه على التحليل التوافقي باستخدام العلاقات:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \phi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$n = 1,2,\ldots\ldots$

وبشكل عام نسمي $A_n\, Cos\, (n\omega x - \phi_n)$ بالتوفيقة النونية سعتها A_n وفرق طورها ϕ_n وتواترها $\frac{n}{T}$ حيث T الدور وx متحول الزمن.

(7.1.2): العمليات على سلاسل فورييه:

بفرض $G(x), F(x)$ دالتان لهما نشرا فورييه التاليان على نفس الفترة:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi}{l}x + b_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$G(x) = \frac{a`_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a`_n Cos\frac{n\pi}{l}x + b`_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

عندها يمكن نشر الدالة $F(x) \pm G(x)$ وفق السلسلة:

$$F(x) \pm G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos\frac{2\pi}{l}x + B_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث تعطى الثوابت الجديدة B_n, A_n, A_0 كما يلي:

$A_0 = a_0 \pm a`_0$ $A_n = a_n \pm a`_n$ $B_n = b_n \pm b`_n$

كذلك الأمر عندما نضرب الدالة $F(x)$ بثابت ما k، عندها سلسلة التابع الناتج تضرب فيها الثوابت الأصلية بالثابت k ضمن شروط على التابعين $(G(x), F(x))$ يمكن ضرب هذين التابعين واستنتاج سلسلة الجداء.

(8.1.2): الجمل المتعامدة (*Orthogonal Sets*):

تعريف:

نقول عن دالتين $\psi_2(x), \psi_1(x)$ معرفتين على الفترة $[a, b]$ والمحققتين للعلاقة:

$$\int_0^b \psi_1(x).\psi_2(x)dx = 0$$

إنهما متعامدتان على الفترة $[a, b]$.

لتكن لدينا مجموعة الدوال:

$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots\dots\dots, \psi_n(x)$

معرفة على $[a, b]$ والتي تقبل هي ومربعاتها المكاملة على $[a, b]$،(أي أنها كمولة تربيعياً)، فلإذا حققت هذه الدوال:

$$\int_a^b \psi_n(x).\psi_m(x)dx = \begin{bmatrix} 0 & n \neq m \\ \gamma_n^2 & n = m \end{bmatrix}$$

نقول عنها إنها متعامدة على [*a, b*].

ملاحظة (1):

هناك دوال كمولة وليست كمولة تربيعياً مثل الدالة $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ على الفترة $(0,1)$.

وفي الحالة الخاصة في حالة التعامد عندما يكون $\gamma_n=1$ نقول عن التعامد إنه نظامي.

ملاحظة (2):

يمكن الحصول على التعامد النظامي من التعامد بشكل عام بقسمة كل تابع ψ_n على γ_n، أي أنه إذا كانت جملة التوابع $\psi_1(x),..........,\psi_n(x)$ متعامدة على الفترة (*a,b*) فإن الجملة $\frac{\psi_1(x)}{\gamma_1},.........,\frac{\psi_n(x)}{\gamma_n}$ متعامدة نظامياً أيضاً.

ملاحظة:

الجملة $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{Sinnx}{\sqrt{\pi}},\frac{Cosnx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ متعامدة نظامياً.

(9.1.2): سلسلة فورييه والجمل المتعامدة:

تعريف:

نعرف سلسلة فورييه للتابع *F(x)* وفق الجملة المتعامدة $\psi_0(x),..........,\psi_n(x)......$ على الفترة]*a,b*[كما يلي:

$$F(x)=C_0\psi_0(x)+C_1\psi_1(x)+......+C_n\psi_n(x)..........$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\psi_n(x)..................(2-10)$$

حيث يمكن تعيين الثوابت C_n وفق العلاقة:

$$C_n = \frac{\int_a^b F(x)\,\psi_n(x)dx}{\int_a^b \psi_n^2(x)dx}$$

لنضرب العلاقة (2-10) بـ$\psi_n(x)$ ولنكامل على الفترة $]a,b[$:

$$\int_a^b F(x)\psi_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \psi_n(x).C_n.\psi_m(x)dx$$

في الطرف الثاني عندما $n \neq m$ بما أن الجملة متعامدة فإن التكاملات تكون معدومة وبالتالي:

$$\int_a^b F(x)\psi_n(x)dx = C_n\int_a^b \psi_n(x).\psi_n(x)dx$$

$$C_n = \frac{\int_a^b F(x)\psi_n(x)dx}{\int_a^b \psi_n^2(x)dx}$$

وهو المطلوب.

(10.1.2): تكامل فورييه:

بفرض $F(x)$ دالة معرفة على $]-\infty,+\infty[$ ولها عدد محدد من نقاط الانقطاع من النوع الأول على كل فترة محدودة من $]-\infty,\infty[$ ، وتقبل المكاملة بإطلاق على $]-\infty,\infty[$ ، عندها يمكن نشر $F(x)$ وفق فورييه في كل نقطة x_0 يقبل فيها $F(x)$ الاشتقاق أي:

$$F(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi}{l}x_0 + b_n Sin\frac{n\pi}{l}x_0$$

يمكننا أن نبدل عن b_n , a_n , a_0 وفق علاقات أولر فنجد:

$$F(x_0)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F(x)dx+\sum_{1=n}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\ F(x)Cos(\frac{n\pi}{l})xdx\ .Cos(\frac{n\pi}{l})x_0+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)Sin(\frac{n\pi}{l})xdx.Sin(\frac{n\pi}{l})x_0\right]$$

$$F(x_0)=\frac{1}{2l}\int_{e}^{e}F(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)Cos\frac{n\pi}{l}(x-x_0)dx$$

بفرض $\frac{n\pi}{l}=U_n$ نجد $\Delta U_n=U_{n+1}-U_n=\frac{\pi}{l}$

أي: $\frac{1}{l}=\frac{\Delta U_n}{\pi}$

ومنه:

$$F(x_0)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F(x)dx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta U_n F(x)CosU_n(x-x_0)dx$$

عندما $l\to\infty$ نجد أن:

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}F(x)dx\to 0$$

لأن (قياسه) محدود و $\infty \leftarrow l$

كذلك:

$$\sum_{1}^{\infty} \Delta U_n \int_{-l}^{l} F(x)Cos(x-x_0)U_n dx \to \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} F(x)Cos(x-x_0)\, udx$$

لأن:

$$\sum_{1}^{\infty} \to \int_{0}^{\infty} \;, \quad \Delta U_n \to du$$

$$l \to \infty \;, \; U_n \to U$$

أي بشكل آخر:

$$F(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-l}^{l} F(x)Cos(x-x_0)udx \qquad \textit{(2-11)}$$

ملاحظة:

إن النهايات السابقة تعتمد على برهان مبرهنة ريمن في الفترات غير المنتهية وعلى أن $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sinx}{n} dx = \pi$.

مبرهنة:

بفرض *F(x)* دالة لها عدد محدود من نقاط الانقطاع من النوع الأول على كل فترة محدودة من الفترة (∞ ، $-\infty$)، عندها في كل نقطة *x* يقبل فيها *F(x)* المفاضلة يكون:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)Cosu(t-x)dtdu \; .... \; \textit{(2-12)}$$

نسمي التكامل الأخير بتكامل فورييه للتابع *F(x)*.

حيث استبدلنا في (2 . 11) كل $x \leftarrow x_0$ و $x \leftarrow t$

يمكن إعادة صياغة تكامل فورييه السابق إذا فككنا *Cos u(t-x)* فنجد أنه يمكن كتابة تكامل فورييه كما يلي:

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}[a(u)\cos ux+b\,(u)Sinux]\,du$$

حيث:

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)Cosutdt$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)Sin\,ut\;dt$$

وهذه العلاقات صحيحة **(**كما في نشر فورييه**)** ضمن شروط كافية ليست لازمة.

(11.1.2): الشكل العقدي لتكامل فورييه:

Complex form of Fourier integral:

في تكامل فورييه كان لدينا العبارة:

I = a(u) Cos ux + b (u) Sin ux

نبدل حسب أولر:

$$a(u)\left(\frac{e^{iux}+e^{-iux}}{2}\right)+b(u)\left(\frac{e^{iux}-e^{-iux}}{2i}\right)$$

$$I=C(u).e^{iux}+C(-u).e^{-iux}$$

حيث:

$$C(u)=\frac{a(u)-ib(u)}{2}$$

$$C(-u)=\frac{a(u)+ib(u)}{2}$$

يمكننا حساب *C(u)* فنجد:

$$C(u)=\frac{a(u)-ib(u)}{2}$$

$$C(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{iut}.dt \qquad \textit{(2-13)}$$

نبدل في عبارة تكامل فورييه:

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}[a(u)Cosux+b(u)\ Sinux]\ du$$

فنجد:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(u).e^{iux}.du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{iux}.e^{-iut}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{iu(x-t)}.dt$$

وبفرض: $F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{iut}.dt$

نجد:

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u).e^{iux}du.................(2-14)$$

وهو الشكل العقدي لتكامل فورييه.

(2 .1 .12): تكامل فورييه للتوابع الفردية والتوابع الزوجية:

بسهولة نرى أنه في حالة التوابع الفردية فإن *a(u)=0* أما $b(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(t)\,Sin\,ut\,dt$

وفي حالة التوابع الزوجية فإن $b(u)=0$ وأما $a(u)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}F(t)Cos\,ut\,dt$.

(13.1.2): تحويل فورييه وعلاقته بتحويل لابلاس:

بالتعريف نسمي $\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{-iut}dt$ بتحويل فورييه للتابع *F(t)* ونرمز له بـ*f(u)* أي:

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t).e^{-iut}.dt$$

وأما *F(t)* فيدعى بتحويل فورييه المعاكس للتابع *f(u)*.

لندرس الدالة:

$$F(t)=\begin{cases} e^{-ut}\phi(t) \leftarrow t>0 \\ 0 \qquad\quad \leftarrow t<0 \end{cases}$$

حيث $\phi(t)$ دالة للمتحول *t*.

عندها نجد أن تحويل فورييه للدالة *F(t)* يكتب:

$$F(u)=\int_{0}^{\infty}e^{-xt}\phi(t).e^{-iyt}dt$$

حيث استبدلنا في تحويل فورييه *y* بـ*u* و *x* بـλ

$$F(u)=\int_0^\infty e^{-(x+iy)t}\phi(t).dt$$

وبفرض $S=x+iy$ متحول عقدي قسمه الحقيقي x موجب نجد:

$$F(u)=\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt=La\,[\phi(t)\,u(t)]$$

أي أن تحويل فورييه للتابع $F(t)$ هو نفسه تحويل لابلاس لدالة $\phi(t)$ (ملاحظة: إن تحويل لابلاس لتابع ما $\phi(t)$ معرف من أجل $t>0$ بالتعريف هو $\phi(s)=\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt$).

مسائل محلولة (2 – 1 – 14)   Solved Problems

مثال 1:

انشر التابع الدوري $F(x)$ المعرف كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$$

حسب سلسلة فورييه.

الحل:

إن المقصود بالسؤال هو التالي:

1 . التحقق من شروط ديرخليه.

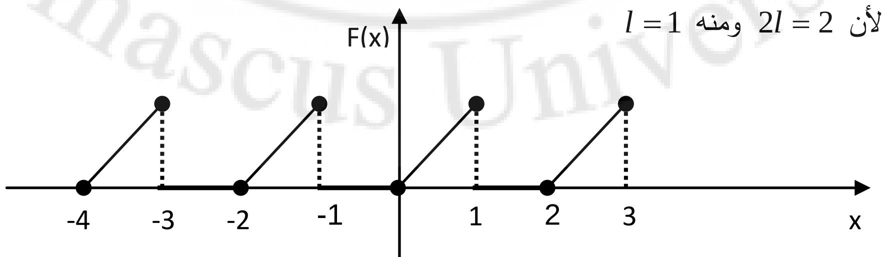
2 . الرسم.

3 . تعيين الثوابت $b_n\,,\,a_n\,,\,a_0$.

التابع $F(x)$ ومشتقه مستمران مقطعياً على فترة الدور $T=2$، ولأن التابع دوري فرضاً لهذا فإن $F(x)$ يحقق شروط ديرخليه ويمكن نشره وفق فورييه كما يلي:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi}{1}x+b_n\ Sin\frac{n\pi}{1}x$$

لأن $2l=2$ ومنه $l=1$



الشكل (2 -1 -9)

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)dx = \int_0^l xdx + \int_1^2 0.dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)Cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$a_n = \int_0^1 x\cos n\pi dx + \int_1^2 0.\cos n\pi .dx$$

$$x = u \qquad dx = du$$

$$Cosn\pi xd = dv \qquad v = \frac{1}{n\pi}Sin\ n\pi x$$

$$a_n = \frac{xSin\ n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi xdx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[Cos\ n\pi x\int_0^1 \frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1\right]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{2}{n^2.\pi^2} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\ Sin\frac{n\pi}{l}\ xdx$$

$$= \int_0^1 xSin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$= \int_0^1 xSin\frac{n\pi}{l}xdx + \int_1^2 0.Sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$x = u \qquad du = dx$$

$$Sin\frac{n\pi}{l}xdx = dv \qquad v = -\frac{1}{n\pi}Cos\ n\pi x$$

$$b_n = \frac{-xCos\ n\pi x}{n\pi}\int_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 Cos\ n\pi xdx$$

$$b_n = \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2.\pi^2}\ Sin\ n\pi x\Big|_0^1$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n1}}{n\pi}$$

وبذلك نجد:

$$F(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]\,Cos\ n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}Sin\ n\pi x$$

مثال 2:

انشر التابع الدوري $F(x)$ المعرف كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < \pi \\ +1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

وارسم التابع على الفترة $(-3\pi, 3\pi)$.

الحل:

نلاحظ أن التابع دوري فرضاً دوره $T = 2\pi$ وهو ثابت على مجال ولهذا فهو ومشتقه مستمران مقطعياً فالتابع يحقق شروط ديرخليه لهذا يمكن نشره وفق فورييه كما يلي:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ Cosnx+b_nSin\ nx$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_c^{c+2\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(-1)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(1)dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-x\Big|_0^{\pi}+x\ \Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\pi+(2\pi-\pi)\right]=\frac{1}{\pi}(0)=0$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_c^{c+2\pi}F(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-Cosnxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}Cosnxdx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[Sinnx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\left[Sinnx\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$a_n=\frac{-1}{n\pi}(0)+\frac{1}{\pi n}(0)=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_c^{c+2\pi}F(x)\ Sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)Sin\ nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(1)Sin\ nxdx$$

$$b_n=\frac{+1}{n\pi}Conx\ \Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\quad Cosnx\ \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}(Cosn\pi-1)-\frac{1}{n\pi}(1-Cosn\pi)$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi n} - \frac{2}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{-4}{n\pi} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)\pi} Sin(2n-1)x$$

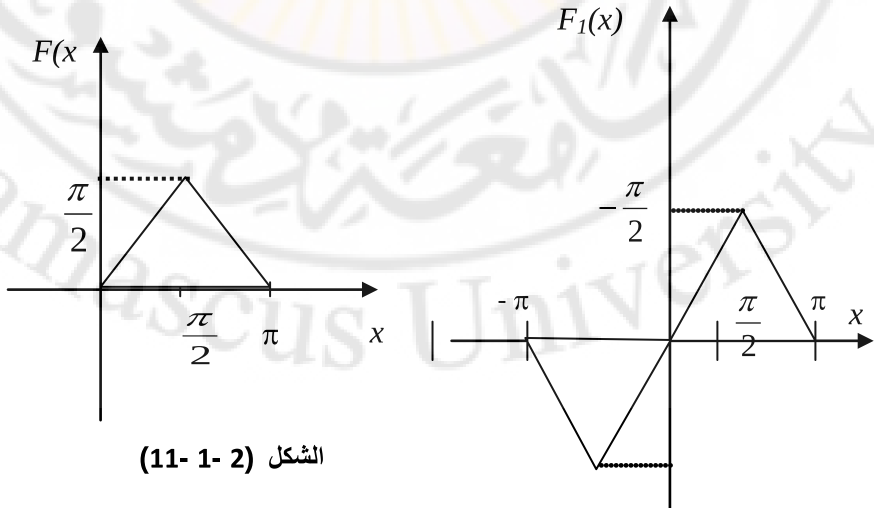
$\pi < x < 2\pi$ أو $0 < x < \pi$

مثال 3:

انشر التابع $F(x)$ المعرف كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

نشراً وفق سلسلة جيوب ثم وفق سلسلة جيوب تمام النشر وفق سلسلة جيوب:



الشكل (2 -1 -11)

لدينا التابع $F_1(x)$ تابع دوري (نحن نريده هكذا) دوره 2π فردي ويحقق شروط ديرخليه لهذا يكون:

$$F_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\ nx$$

وبالتالي:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_1(x)\,Sin\ nx\ dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xSinnxdx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)Sin\ nxdx$$

في التكامل الأول نفرض $x = u$ و $dv = sin\ nx\ dx$ وفي التكامل الثاني نفرض $u=\pi\text{-}x$ و $dv = sin\ nx\ dx$ ونكامل بالتجزئة فنجد:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{Sinnx}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]+\left[-\frac{(\pi-x)}{n}Cosnx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{Sinnx}{n^2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\frac{\pi}{2}Cos\frac{n\pi}{2}-0}{n}+\frac{Sin\frac{\pi}{2}x-0}{n}-\frac{0-\frac{\pi}{2}Cos\frac{2\pi}{2}}{n}-\frac{Sinn\pi-Sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2Sin\frac{2\pi}{2}}{n^2}\right]=\frac{4}{\pi n^2}Sin\frac{n\pi}{2}$$

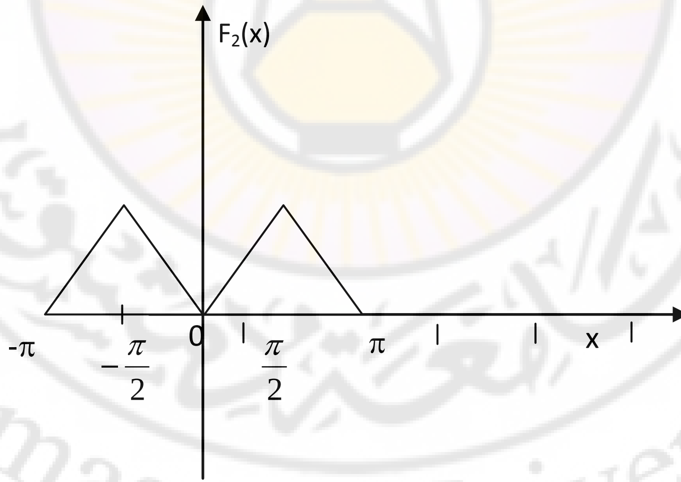
نعوض فنجد:

$$F_1(x) = F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{Sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}Sinnx$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

1 . من أجل إيجاد سلسلة جيوب التمام نمدد التابع $F(x)$ على الفترة $(-l,l)$ كما يلي:

$$F_2(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ -x & \frac{-\pi}{2} < x < 0 \\ +(\pi + x) & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



الشكل (2 -1 -12)

عند ذلك يكون التابع $F_2(x)$.

محققاً لشروط فورييه دوره 2π وهو زوجي ولهذا يكون:

$$F_2(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1=n}^{\infty} a_n Cosnx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{-(\pi - x)^2}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{\gamma} - 0 - 0 + \frac{\pi^2}{\gamma}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$$

$$a_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} xCosnxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)Cosxdx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} I_1 + \frac{2}{\pi} I_2$$

حيث:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xCosnxdx \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)Cosnxdx$$

في التكامل الأول نفرض $x = u$ ومنه $dx = du$

$$Cos\ nx.dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{n} Sin\ nx$$

وفي التكامل الثاني نفرض $\pi - x = u$ ومنه $du = -dx$

ومنه $v=\frac{1}{n}Sin\,nx \Leftarrow Cos(nx)=dv$

$$I_1=\frac{x}{n}Sinnx\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}Sinnxdx$$

$$=\frac{\pi Sin\frac{n\pi}{2}}{2n}-0+\frac{1}{n^2}Cosnx\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_1=\frac{\pi}{2n}Sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}(Cosn\pi-1)..................(1)$$

$$I_2=\frac{(\pi-x)}{n}Sinn\pi\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}Sinnxdx$$

$$=-\frac{\pi}{2n}Sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}Cosnx\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$I_2=-\frac{\pi}{2n}Sin\frac{2\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\left(Cosn\pi-Cosn\frac{\pi}{2}\right)..........(2)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}I_1+\frac{2}{\pi}I_2$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2n}Sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}(Cosn\pi-1)+\left(-\frac{\pi}{2n}Sin\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{n^2}(Cos4\pi)+\frac{1}{n^2}Cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}Cos\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{2}{\pi n^2}Cos\frac{n\pi}{2}$$

$$F_2(x)=F_1(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{1=n}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2}Cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ أو $0<x<\frac{\pi}{2}$

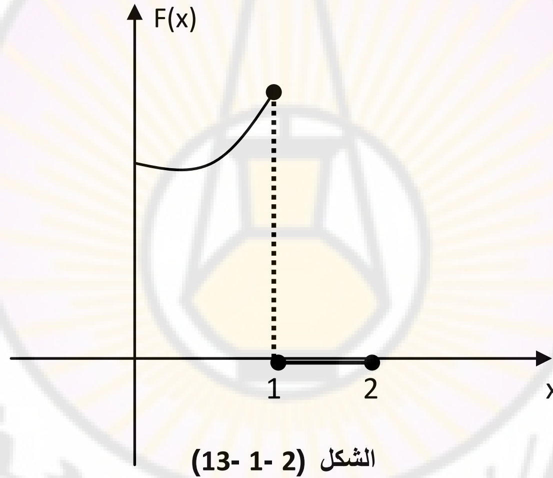
مثال 4:

أوجد نشر فورييه العقدي للتابع *F(x)* المعرف كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases} e^{x} & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$$

حيث $F(x)=F(x+2)$

نلاحظ أن التابع $F(x)$ دوري دوره *T = 2l = 2* كذلك التابع ومشتقه مستمران على فترة الدور ، لهذا يمكن نشره وفق نشر فورييه العقدي.



الشكل (2 -1 -13)

$$F(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_n.e^{i\frac{n\pi}{l}x}$$

لكن *l = 1* لهذا:

$$F(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_n.e^{inx}$$

$0<x<1$ أو $1<x<2$

$$C_n = \frac{1}{l}\int_0^{2=2l} F(x).e^{i\frac{n\pi}{l}x}dx$$

$$C_n = \int_0^1 e^x.e^{in\pi x}dx$$

$$= \int_0^1 e^x.e^{-in\pi x}dx$$

$$= \int_0^1 e^{(1-in\pi)x}dx = \frac{1}{1-in\pi}.e^{(1-in\pi)x}\Big|_0^1$$

$$C_n = \frac{e^{1-in\pi}-1}{1-in\pi} = \frac{e(Cosn\pi - iSinn\pi)-1}{1-in\pi}$$

$$C_n = \frac{(-1)^n e - 1}{1-in\pi}$$

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n e-1}{1-in\pi}.e^{in\pi x}$$

$0 < x < 1$ أو $1 < x < 2$

لإيجاد النشر الحقيقي نستخدم العلاقات:

$a_0 = 2\,C_0$

$a_n = C_n + C_{-n}$

$b_n = i\,(C_n - C_{-n})$

$a_0 = 2(e-1)$

$$a_n = \frac{(-1)^n e-1}{1-in\pi} + \frac{(-1)^{-n} e-1}{1+in\pi}$$

$$=\left[(-1)^n e-1\right]\left[\frac{1}{1-in\pi}+\frac{1}{1+in\pi}\right]$$

$$=\frac{\left[(-1)^n e-1\right]\left[1+in\pi+1-in\pi\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$a_n=\frac{2\left[(-1)^n e-1\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n=i(C_n-C_{-n})$$

$$=i\left[\frac{(-1)^n e-1}{1-in\pi}-\frac{(-1)^{-n} e-1}{1+in\pi}\right]$$

$$=\frac{i\left[(-1)^n e-1\right]\left[1+in\pi-1+in\pi\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n=i\frac{\left[(-1)^n e-1\right]\left[2in\pi\right]}{1+n^2\pi^2}$$

$$b_n=\frac{2\left[(-1)^n e-1\right]n\pi}{1+n^2\pi^2}$$

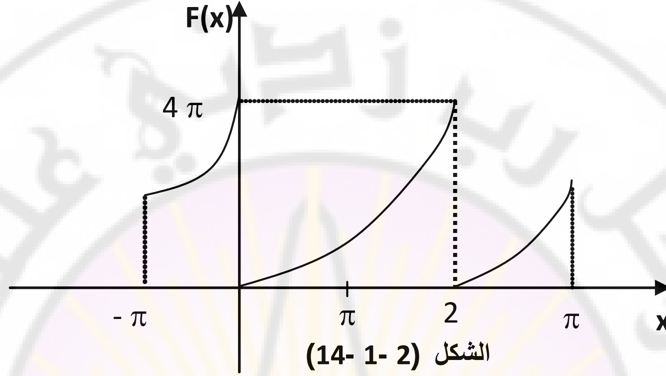
نبدل:

$$F(x)=(e-1)+\sum_{1=n}^{\infty}\frac{2\left[(-1)^2 e-1\right]}{1+n^2\pi^2}Cosn\pi x+\frac{2\left[(-1)^n e-1\right]}{1+n^2\pi^2}Sinn\pi x$$

$0<x<1$ أو $1<x<2$

مثال5:

حلل توافقياً التابع الدوري $F(x) = x^2$ ذي الدور 2π على الفترة $(0,2\pi)$ وارسمه على الفترة $(-\pi,3\pi)$.



الشكل (2 -1 -14)

يمكن نشر هذا التابع ذي الدور $2l = 2\pi$ وفق فورييه فنجد بالحساب:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{\pi.3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 Cosnxdx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 Sinnxdx = -\frac{4\pi}{n}$$

ومنه:

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{1=n}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} Cosnx - \frac{4\pi}{n} Sinnx$$

وحسب علاقات التحويل إلى التحليل التوافقي نجد:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{-4\pi}{n}\right)^2} = \frac{4}{n^2}\sqrt{1+\pi^2 n^2}$$

$$\phi_n = tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\frac{-4\pi}{n}}{\frac{4}{n^2}}\right) = tg^{-1}(-n\pi)$$

$$x^2 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Cos(nx - \phi_n)$$

أما التوفيقة الأولى ففرق طورها ϕ_1 وسعتها A_1 وهكذا بالنسبة لباقي التوفيقات.

مثال 6:

إن الجملة $\{1, Cosnx, Sinnx\}$ متعامدة على الفترة $(-\pi, \pi)$ لأن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1.dx = 2\pi \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1.Cosnx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1.Sinnxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Cosnx.Cosnxdx = \int_{-\pi}^{\pi} Sin\,nx.Sin\,nxdx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Sin\,nx.Sin\,nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} Cos\,nx.Cos\,nxdx = 0$$

عندما $n \neq m$

مثال 7:

أوجد تكامل فورييه للتابع *F(x)* المعرف كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}1 \leftarrow |x|<1\\ \frac{1}{2} \leftarrow |x|=1\\ 0 \leftarrow |x|>1\end{cases}$$

نلاحظ من البيان أن التابع $F(x)$ زوجي.

لهذا $0=b(u)$

$$F(x)=\int_0^\infty a(u)\, Cosuxdu$$

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(t) Cos\, ut\, dt$$

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 Cosutdt=\frac{2}{\pi}\frac{Sinut}{u}\Big|_0^1$$

$$a(u)=2\,\frac{Sinu}{u}$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Sinu}{u} Cos\, ux\, du$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Sinu}{u} Cos\, ux\, du=\begin{cases}1 \leftarrow |x|<1\\ \frac{1}{2} \leftarrow |x|=1\\ 0 \leftarrow |x|>1\end{cases}$$

نلاحظ من أجل *x=0* أي *Cos u (0)= 1* أي:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Sinu}{u}du = 1$$

$$\int_0^\infty \frac{Sinu}{u}du = \frac{\pi}{2}$$

مثال 8:

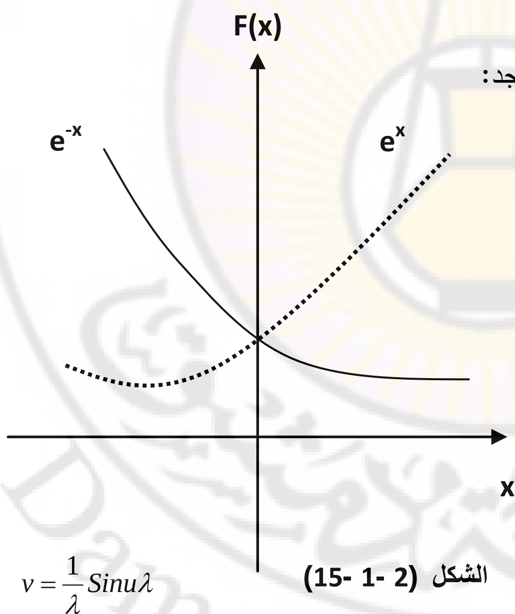
اعتماداً على تكامل فورييه برهن على صحة ما يلي:

$$\int_0^\infty \frac{Cos\lambda x}{\lambda^2+1}d\lambda = \frac{\pi}{2}.e^{-x} \qquad x \geq 0$$

لندرس التابع $F(x) = e^{-x}$ فنجد:

في عبارة تكامل فورييه نستبدل: e^{-x} بـ$F(x)$ فنجد:

$$e^{-x} = F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Cos\lambda x d\lambda \int_0^\infty e^{-u} Cos\lambda u du$$



الشكل (2 -1 -15)

لنحسب التكامل:

$$I = \int_0^\infty e^{-u} Cosu\lambda du$$

$$Cosu\lambda du = dv$$

$$v = \frac{1}{\lambda} Sinu\lambda$$

$$e^{-u} = u_1 \qquad du_1 = -e^{-u}\,du$$

$$I = e^{-u}\frac{Sinu\lambda}{\lambda}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-u} Sinu\lambda du$$

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-u} Sinu\lambda du$$

نحسب التكامل I_1 بالتجزئة:

$e^{-u} = u_2 \quad -e^{-u}\, du = du_2$

$$Sinu\lambda du = dv \qquad v = -\frac{1}{\lambda} Cosu\lambda$$

$$I_1 = -\frac{e^{-u}}{\lambda} Cosu\lambda \quad \Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-u} Cosu\lambda\, du$$

$$= +\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} I$$

$$I_1 = \frac{1}{\lambda}(1 - I)$$

نبدل في علاقة I فنجد:

$$I = e^{-u}\, \frac{Sinu\lambda}{\lambda} \quad \Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}(1 - I)\right]$$

$$I = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} I$$

$$I\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$I\left(\frac{1 + \lambda_2^2}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$I = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

نبدل في علاقة e^{-x}:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{Cos\lambda}{1+\lambda^{2}}$$

ومنه:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{Cos\lambda x d\lambda}{1+\lambda^{2}} = \frac{\pi}{2}.e^{-x} \qquad x \geq 0$$



Supplementary Problems (15 – 1 – 2) مسائل إضافية

1 -برهن أن :

$$\int_{-l}^{l}\sin(\frac{k}{l})xdx=\int_{-l}^{l}\cos(\frac{k}{l})xdx=0$$

$$k=1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{-l}^{l}\cos(\frac{m\pi}{l})x\cos(\frac{n\pi}{l})xdx=\int_{-l}^{l}\sin(\frac{m\pi}{l})x\sin(\frac{n\pi}{l})xdx$$

$$=\begin{cases}0 & m\neq n\\ l & m=n\end{cases}$$

2− أوجد سلسلة فورييه للتوابع الدورية التالية :

$$F_1(X)=\begin{cases}0 & -5<X<0\\ 3 & 0<X<5\end{cases}$$

$$F_2(X)=X^2 \qquad 0<X<2\pi$$

$$F_3(X)=X+1 \qquad 0<X<1$$

$$F_4(X)=\begin{cases}e^{x} & 0<x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}<X<1\end{cases}$$

3− أوجد نشر فورييه للتوابع التالية :

$$F_1(X)=\begin{cases}8 & 0<X<2\\ -8 & +2<X<4\end{cases}$$

$$F_2(X)=\begin{cases}-X & -4<X<0\\ X & 0<X<4\end{cases}$$

$$F_3(X)=4X \qquad 0<X<10$$

$$F_4(X)=\begin{cases}2X & 0<X<2\\ 0 & -3<X<0\end{cases}$$

الأجوبة:

$$F_1(x) = \frac{16}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos n\overline{\pi}}{\mathrm{n}}\right) \sin \frac{n\overline{\pi}}{4} \bar{x}$$

$$F_2(x) = -\frac{8}{\pi^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1-\cos n\,\overline{\pi}}{\mathrm{n}^2} \cos \frac{n\overline{\pi}}{4} x$$

$$F_3(x) = -\frac{40}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} \sin \frac{n\overline{\pi}}{3} x$$

$$F_4(x) = \frac{3}{2} + \sum_{1}^{\infty} 6\left(\frac{\cos n\overline{\pi}-1}{\mathrm{n}^2\pi^2}\right) \mathrm{son} \frac{n\overline{\pi}}{3} x$$

$$-\sum_{1}^{\infty} \frac{6\cos n\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} x$$

4 – انشر التابع

$$F(x) = \cos x \qquad\qquad o \leq x \leq \pi$$

الجواب :

$$F(x) = \frac{8}{\pi} \sum \frac{n\ sin^2 n}{4n^2-1} x$$

5 – برهن أن (بفرض $o \leq x \leq \pi$) :

$$x(\pi - n) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos\ 2n}{1^2} + \frac{cos\,4x}{2^2} + \cdots\right)$$

$$x(\pi - n) = \frac{8}{\pi} - \left(\frac{\sin\ x}{1^3} + \frac{sin\,3x}{3^3} + \cdots\right)$$

6 – استنتج من التمرين السابق أن

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad و \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{1^2}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{3^2}$$

7 – اعتماداً على تكامل فوربيه برهن أن

$$\int_o^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2+1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad x \geq o$$

8 – أوجد تكامل فوربيه للتوابع التالية

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x| < 3 \\ o & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ o & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$



الفصل الثاني

التوابع الخاصة

Special Functions

إن التوابع الخاصة هي مجموعة من التوابع غير العادية التي تصادف في الكثير من التطبيقات الهندسية الكهربائية منها والميكانيكية على شكل تكاملات محددة لايمكن حلها تقليدياً.

سوف نطلع على بعض منها بالتفصيل والبعض الآخر بالإيجاز.

(2−2−1): تكامل أولر من النوع الأول (التابع بيتا):

أطلق ليجاندر اسم تكامل أولر من النوع الأول على التكامل الوسيطي التالي:

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad (2-1)$$

حيث $a > 0$ و $b > 0$، وهذا التكامل كما نرى هو تكامل وسيطي (وسيطاه a,b) ومتحول واحد وهو يدعى بالتابع بيتا.

إن هذا التكامل يكون له معنى من أجل $a > 0\ ,\ b > 0$.

ملحوظة (1):

من أجل $a=b=0$ نجد التكامل الشاذ التالي:

$$\beta(a,b)=\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)}$$

خواص التابع $\beta(a,b)$:

1 . باستبدال x بـ $t\text{-}1$ نجد:

$$\beta (a, b) = \beta (b , a)$$

ذلك لأننا لواستخدمنا المطابقة:

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$$

$$\beta(a,b) = \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$\beta(a,b) = \frac{b-1}{a}\,\beta(a,b-1) - \frac{b-1}{a}\,\beta(a,b)$$

$$\beta(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\,\beta(a,b-1)$$

ملحوظة (2):

يمكن استخدام العلاقة السابقة بشكل متتالٍ على شرط أن يبقى $b > 1$، كذلك يمكن استنتاج العلاقة التالية بسبب التناظر في β بالنسبة لـa, b:

$$\beta(b,a) = \frac{a-1}{a+b-1}\beta(a-1,b) \quad ....(2\text{-}3)$$

حيث $a > 1$، وإذا وضعنا $b = n$ عدد طبيعي نجد بتطبيق العلاقة (2-2) عددا متتالية من المرات نجد:

$$\beta(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\,\frac{n-2}{a+n-2}\,\frac{n-3}{a+n-3}\,\frac{1}{a+1}\beta(a,1)$$

وإذا حسبنا $\beta(a,1)$ نجد:

$$\beta(a,1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$$

$$\beta(a,n) = \frac{1,2,3,..................(n-1)}{a(a+1).............(a+n-1)} ....(2-4)$$

وعندما $a = m$ نجد:

$$\beta(m,n) = \frac{(n-1)!}{(m+n-1)........(n+1)m} = \frac{(n-1)!}{\frac{(m+n-1).......(m+1)m.(m-1)!}{(m-1)!}}$$

$$\beta(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} ....(2-5)$$

حيث $0! = 1$ ودوماً $n.\ m$ أعداد صحيحة موجبة.

2. شكل آخر للتابع بيتا:

$$\beta(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy ....(2-6)$$

لنجرِ التغيير التالي في عبارة $\beta(a,b)$

$$x = \frac{y}{1+y} \qquad\qquad 0 \le y < \infty$$

فنجد:

$$dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$x = 0 \to y = 0$$

$$x = 1 \to y = \infty$$

$$\beta(a,b)=\int_0^\infty\left(\frac{y}{1+y}\right)^{a-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{b-1}\frac{dy}{(1+y)^2}==\int_0^\infty\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy..........$$

وهو الشكل الثاني للتابع $\beta(a,b)$.

3 . لنبدل في العبارة (*2-6*) *b = 1-a* فنجد:

$$\beta(a,1-a)=\int_0^\infty\frac{y^{a-1}}{1+y}dy$$

ومن خواص بعض التكاملات في الساحة العقدية:

$$\int_0^\infty\frac{y^{a-1}}{1+y}dy=\frac{\pi}{Sina\pi}$$

حيث *0 < a < 1*، أي: $\beta(a,1-a)=\frac{\pi}{Sina\pi}$ ، وعندما $a=\frac{1}{2}=1-a$ نجد:

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

4 – الشكل المثلثاتي للتابع بيتا :

يعطى الشكل المثلثاتي كما يلي:

$$I\,\frac{1}{2}\beta(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Cos^{2m-1}\theta.Sin^{2u-1}\theta\;dt$$

نجري التحويل $Sin^2\theta=t$ فنحصل على المطلوب.

(2.2.2): تكامل أولر من النوع الثاني (التابع غاما):

سمى ليجاندر التكامل التالي:

$$\Gamma(a) = \int_{0}^{\infty} x^{a-1}.e^{-x} dx ....(2-7)$$

بتكامل أولر من النوع الثاني أو ما يسمى بالتابع غاما، وهو كما نلاحظ هو تكامل وسيطي وهو هام جداً في دراسة التحليل وتطبيقاته.ولندرس بعض خواصه.

1 . لنبدل في العلاقة (2-7) $x = \ln\frac{1}{z}$ فنجد:

$$x = 0 \to z = 1; x = \infty \to z = 0$$

$$dx = -\frac{dz}{z}$$

$$\frac{1}{z} = e^{x} \to z = e^{-x}$$

$$\Gamma(a) = -\int_{1}^{0} \left(\ln\frac{1}{z} \right)^{a-1} z\frac{dz}{z}$$

$$\Gamma(a) = \int_{0}^{1} \left(\ln\frac{1}{z} \right)^{a-1} dz$$

يمكن البرهان على صحة العلاقة التالية:

$$\ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}} \right)$$

لأجل ذلك نمهد بالبرهان التالي:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\lg_a(1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \lg_a(1+\alpha)^{\frac{1}{a}}$$

$$= \lg_a \lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \lg_a .e ....(A)$$

وعندما $a = e$ نجد:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$$

لنبرهن أيضاً على $\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln a$

لهذا نفرض $a^{\alpha} - 1 = \beta$

$$a^{\alpha} = 1 + \beta \Rightarrow (\alpha \to 0 \Leftrightarrow \beta = 0)$$

ومنه $\alpha = \lg_a (1+\beta)$

لهذا نجد:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\lg_a (1+\beta)} = \frac{1}{\lg_a .e} = \ln a$$

وحسب العلاقة *(A)* إذا أخذنا كحالة خاصة:

$$\alpha = \frac{1}{n} \quad \Leftarrow \quad \begin{matrix} a \to 0 \\ n \to \infty \end{matrix}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{a_n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln a$$

وبوضع $\frac{1}{z} = a$

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} = \ln\frac{1}{z}$$

$$\ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1 - z^{\frac{1}{n}})}{z^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)}{z^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$$

نبدل في عبارة *Γ(a)*

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1}\int_0^1 \left((1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz$$

$$z = y^n \Rightarrow dz = ny^{n-1}dy$$

نبدل:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy$$

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \;\beta(n,a)..............(2-8)$$

وهو شكل آخر للتابع *Γ(a)*

ويمكن أيضاً وضع $\Gamma(a)$ باستبدال $\beta(n,a)$ فنجد:

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^{a}\frac{(n-1)(n-2)...........3.2.1}{a(a+1).........(a+n-1)}...........(2-9)$$

2 . إن التابع $\Gamma(a)$ (من أجل $a > 0$) مستمر وله مشتق من أية رتبة بالنسبة لـa.

يكفي البرهان على وجود المشتق ليتم المطلوب ؛ لهذا نشتق ما تحت إشارة التكامل بالنسبة للوسيط a.

$$\frac{d\Gamma(a)}{dz}=\Gamma'(a)=\int_{0}^{\infty} x^{a-1}(\ln(x)).e^{-x}dx$$

$$=\int_{0}^{1} x^{a-1}(\ln x)dx+\int_{1}^{\infty} x^{a-1}(\ln x).e^{-x}dx$$

إن كلاً من التكاملين موجود ولهذا فإن المشتق $\Gamma`(a)$ موجود بسبب تكامل القيم المطلقة للتوابع المستكملة (حسب قاعدة لايبتنز)، وبالاشتقاق مرة ثانية:

$$\Gamma``(a)=\int_{0}^{\infty} x^{a-1}(\ln(x))^{2}.e^{-x}dx$$

كذلك

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_{0}^{\infty} x^{a-1}(\ln(x))^{n}.e^{-x}dx$$

3 . إذا كاملنا عبارة التابع $\Gamma(a)$ بالتجزئة نجد:

$$F(a+1)=a\Gamma(a)$$

4 . في العلاقة $\Gamma(a)$ نضع $a = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 . e^{-x} dx = 1$$

وعندما يكون *n* طبيعياً نجد:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

5 . نلاحظ أيضاً أن:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

كذلك نجد أن $\Gamma`(a)$ متزايد لأن $\Gamma``(a)$ موجب، ونجد أيضاً من أجل $0 < a < a_0$ أن $\Gamma`(a) < 0$ ، والتابع $\Gamma(a)$ متناقص على المجال السابق وهو متزايد على المجال $a_0 < a < \infty$ لأن $\Gamma`(a) > 0$.

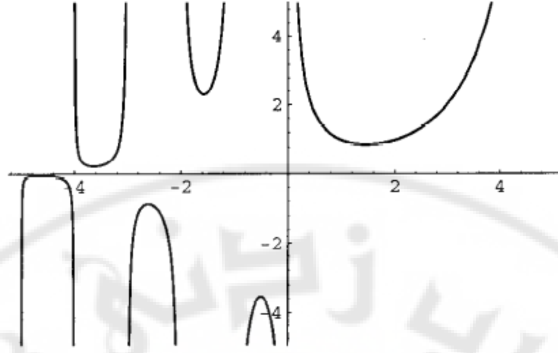
يمكن التأكد من أن $a_0 = 1.4616$ وأن $\min \Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0.8856$

بسهولة نرى أن:

$$\lim_{a \to 0+} \Gamma(a) = \lim_{a \to 0+} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \infty$$

$$\lim_{a \to \infty} \Gamma(a) = \infty$$

وسنرى لاحقاً أن قيم التابع Γ عند القيم الصحيحة السالبة تسعى إلى $\pm\infty$ ولهذا يمكن رسم منحني هذا التابع كما يلي:



الشكل (2 -2 -1)

6 . العلاقة بين التابعين $\Gamma(a)$ و $\beta(a,b)$:

في عبارة $\Gamma(a)$ نجري التحويل $x = ty$ فنجد:

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix} y=0 \\ y=\infty \end{matrix}\right.$$

$$dx = t.dy$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty (ty)^{a-1}.e^{-ty}tdy = t^a \int_0^\infty y^{n-1}.e^{-ty}.dy$$

نضرب الطرفين بـt^{a-1} ونكامل من 0 إلى ∞ بالنسبة لـt:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = \int_0^\infty t^{a-1}dt = \int_0^\infty y^{a+b-1}.e^{-(1+t)y}dy$$

لكن الطرف الأول من العلاقة السابقة هو التابع $\beta(a,b)$ مضروباً بـ$\Gamma(a+b)$ لهذا نجد:

$$\Gamma(a+b)\ \beta(a,b) = \int_0^\infty y^{a+b-1}.e^{-y}dy \int_0^\infty t^{a-1}.e^{-ty}dt$$

لكن $\displaystyle\int_0^\infty t^{a-1}.e^{-ty}dt = \frac{\Gamma(a)}{y^a}$

ومنه:

$$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}..............(2-10)$$

أوجد هذه العلاقة العالم ديرخليه.

7 . في العبارة (*2-10*) لنضع *b = 1 – a* فنجد:

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$$

$$\beta(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

$$\beta(a,1-a)=\frac{\pi}{Sina\pi} \qquad 0<a<1$$

ومن أجل $a=\frac{1}{2}$

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

كذلك:

$$\beta(a,1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{1}$$

أي

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{Sina\pi}....................(2-11)$$

وتسمى هذه العلاقة علاقة الإضافة (أو الإتمام)، ومن أجل $a=\frac{1}{2}$ نجد:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\,dz$$

نبدل $z \to x^2$ فنجد:

$$\sqrt{\pi}=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وهو تكامل بواسون.

8 . إن قيم $\Gamma(a)$ من أجل القيم الصحيحة السالبة يمكن حسابها من العلاقة:

$$\Gamma(1+a)=a\Gamma(a)$$

حيث نجد $a=\varepsilon \to 0^+$

$$\Gamma(0^+)=\frac{\Gamma(0^+ +1)}{0^+}=+\infty$$

وعندما $\varepsilon \to 0^-$ نجد:

$$\Gamma(0^-)=\frac{\Gamma(0^- +1)}{0^-}=-\infty$$

أي $\Gamma(0)=\pm\infty$

ومن أجل $a=-1+\varepsilon$ نجد:

$$\Gamma(-1)^+=\frac{\Gamma(0^+)}{-1}=-\infty$$

ومن أجل $a=-1-\varepsilon$ نجد:

$$\Gamma(-\varepsilon)=(-1-\varepsilon)\,\Gamma(-1-\varepsilon)$$

ننهي *a* إلى *1*- من اليسار

$$\Gamma(-1)=\frac{\Gamma(0)^-}{-1}=\frac{-\infty}{-1}=+\infty$$

وهكذا نجد من أجل *a = - m* عدد صحيح سالب نجد:

$$\Gamma(-m)=\pm\infty$$

ومن أجل $a=n-\frac{1}{2}$ نجد:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

نطبق ذلك عدة مرات:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)............\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5).........1}{2.2.2................2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)}{2n}!!\sqrt{\pi}.............(2-12)$$

حيث $(2n-1)!!$ هو العاملي المضاعف (القفزة 2 بدلاً من 1).

نبدل $a=n+\frac{1}{2}$ في العلاقة $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{Sina\pi}$ فنجد:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{Sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}=(-1)^n\pi$$

نعوض من *(2-12)* عن $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ فنجد:

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}\;..................(2-13)$$

مثال 1:

احسب التكامل:

$$I=\int_0^\infty x^3.e^{-x}dx$$

نوازن هذا التكامل مع التابع $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}.e^{-x}.dx$

فنجد *a = 4* ومنه *I =* $\Gamma(4)=3!=6$

مثال 2: احسب قيمة التكامل $J=\int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx$

بالمقارنة مع التكامل $\Gamma(a)$ نجد هناك اختلافاًبالموازنة المباشرة؛ لهذا يمكن إجراء تحويل ما للنقل للشكل المباشر فنفرض *2x= z*. نلاحظ أن حدود التكامل لا تتغير لكن *dz = 2 dx* نجد:

$$J=2\int_0^\infty\left(\frac{z}{2}\right)^6.e^{-z}dz=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty z^6.e^{-z}dz$$

$$=\frac{1}{2^7}\Gamma(7)=\frac{6!}{2^7}$$

مثال 3: احسب التكامل:

$$k=\int_{0}^{\infty}\sqrt{y}.e^{-y^{2}}\,dy$$

نلاحظ هنا وجود تغير أكبر في شكل التابع المستكمل حيث يظهر الأس بشكل تربيعي؛ لهذا نجري التحويل التالي:

نفرض $y^2 = z$ فنجد أن حدود التكامل لا تتغير لكن $y=z^{\frac{1}{2}}$ ومنه $dy=\frac{1}{2}.z^{\frac{-1}{2}}dz$ نبدل:

$$K=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}z^{\frac{1}{4}}.e^{-z}.z^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}z^{\frac{-1}{4}}.e^{-z}.dz$$

نوازن مع التابع $\Gamma(a)$ عندها $-\frac{1}{4}=a-1\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

$$K=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).Sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

(2 .2 .3) تابع الخطأ *(Error Function)*:

يعرف تابع الخطأ (وهو يستخدم كثيراً في نظرية الاحتمال) بالعلاقة:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-y^{2}}dy............(2-14)$$

يتصرف هذا التابع بالصفات التالية:

$erf(-x) = - erf(x)$

$erf(\infty) = 1$

ومنه $erf(-\infty) = -1$

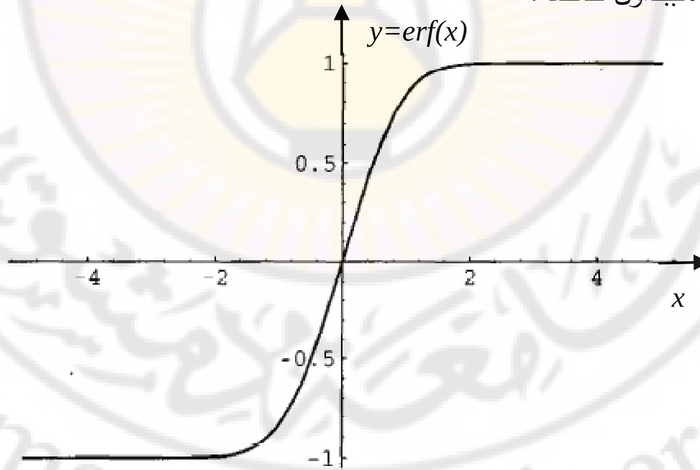
ويعرف التابع المتمم لتابع الخطأ كما يلي:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

حيث

$$erfc(x) + erf(x) = 1$$

وتعطى قيمه بجداول خاصة:



الشكل (2- 2- 2)

(4.2.2): تكاملا فرينيل *(Fresnel Function)*:

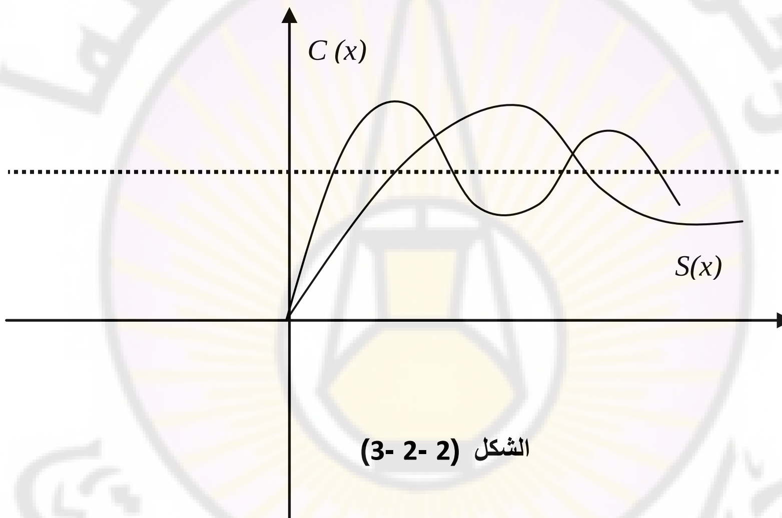
تظهر هذه التكاملات في أبحاث الضوء عادة وتعرف كمايلي:

$$
\left.\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^x Sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)dy \\
C(x) &= \int_0^x Cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)dy
\end{aligned}\right\}\text{........................}(2-15)
$$

نلاحظ أن:

S(-x)= - S(x)

C(-x) = - C(x)



الشكل (2 -2 -3)

نلاحظ من أجل القيم الخاصة:

S(x) = C (x) = 0

C(∞) = S(∞) = ½

C(-∞) = S(-∞) = - ½

ويمكن تعريف التوابع المتممة لـ*C(x) , S(x)* كمايلي:

C(x) = + C(x) = ½   *S(x) + S(x) = ½*

(2 . 2 . 5) الجيب التكاملي (Sine integral):

نعرف هذا التابع بالعلاقة:

$$Si(x)=\int_0^x \frac{Siny}{y}dy.....................(2-16)$$

$$=\int_0^x (1-\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}................)dy$$

$$Si(x)=C+x-\frac{x^3}{3!.3}+\frac{x^5}{5!.5}-\frac{x^7}{7!.7}+..............$$

نلاحظ أنه يمكن تعيين قيمة الثابت عندما $x = 0$ فنجد $c = 0$ ولهذا يكون:

$$Si(x)=x-\frac{x^3}{3-3!}+\frac{x^5}{5.5!}................$$

$$Si(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{x^{2n-1}}{(2n-1).(2n-1)!}$$

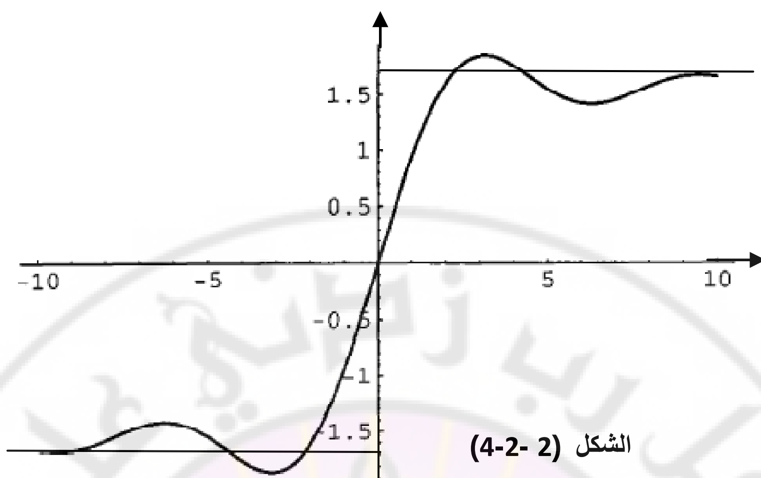
وعندما $x\rightarrow\infty$ نجد:

$$Si(\infty)=\int_0^{\infty}\frac{Siny}{y}dy=\frac{\pi}{2}$$

وذلك حسبما برهنا ورأينا في تكامل فورييه، كذلك نلاحظ أن:

$$Si\ (-x) = -\ Si(x)$$

$$Si(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$



الشكل (2 -2-4)

(6.2.2): التجيب التكاملي *(Cosine integral)*:

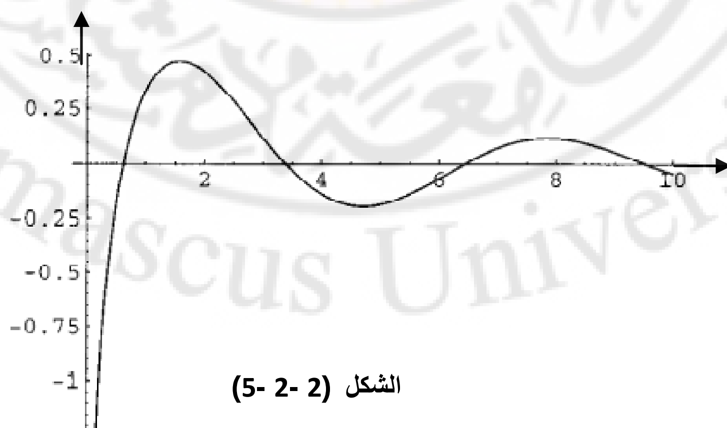
نعرف تابع التجيب التكاملي وفق العلاقة:

$$Ci(x) = -\int_{x}^{\infty} \frac{Cosy}{y} dy ....(2-18)$$

نلاحظ أن هذا التابع زوجي:

$$Ci(0) = -\infty \quad , \qquad Ci(\infty) = 0$$

هناك جداول تعطي قيم هذه التوابع الخاصة من أجل أية قيمة لـx.



الشكل (2 -2 -5)

(2 . 2 .7): اللغارتم التكاملي *(Logarithm integral)*:

يعرف اللغارتم التكاملي بالعلاقة:

$$Li(x) = \int \frac{dx}{Ln(x)}$$

لنبدل $x = e^t$ فنجد: $dx = e^t \, . \, dt$

$$Li(x) = Li(e^t) = \int \frac{e^t . dt}{Ln(e^t)}$$

$$= \int \frac{\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + ...\right) dt}{t}$$

$$= \int \frac{dt}{t} + \int dt + \int \frac{t}{2!} dt + ...$$

$$= \ln t + t + \frac{t^2}{2.2!} + \frac{t^3}{3.3!} + ...$$

$$Li(x) = \ln \ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2!.2} + \frac{(\ln x)^3}{3!.3} + ... + c$$

$x > 1$ لأن $x = e^t$, $t > 0$

(2 . 2 . 8) توابع بيسيل *(Bessel Functions)*:

تعطى معادلة بيسيل وفق العلاقة التالية:

$$x^2 y_{xx} + x y_x + (x^2 - m^2) y = 0 \qquad (2\text{-}19)$$

حيث m عدد ثابت (عقدي أو حقيقي).

مثل هذه المعادلات التفاضلية ذات الأمثال المتغيرة يبحث عن حل لها على شكل تابع مؤلف من قوى بالنسبة لـx مضروبة بسلسلة قوى بالنسبة لـx مثل:

$$y = x^l \sum_{k=0}^{\infty} A_k . X^k$$

يمكن افتراض $A_0 \neq 0$ وهذا ممكن لعدم تعين l، كما يمكن إعادة كتابة الحل السابق كما يلي:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k X^{l+k}$$

بالاشتقاق نجد:

$$y` = \sum_{k=0}^{\infty} (l+k) A_k x^{l+k-1}$$

$$y`` = \sum_{k=0}^{\infty} (l+k)(l+k-1) A_k X^{l+k-2}$$

نعوض في (*2-19*) فنجد:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (l+k)(l+k-1) A_k X^{l+k-2} +$$

$$x \sum_{k=0}^{\infty} (l+k) A_k x^{(l+k-1)} + (x^2 - m^2) \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{l+k} = 0$$

نطابق أمثال المتحول x المرفوع إلى الأس $l,\ l+1,\ l+2, \ldots\ldots\ldots, l+k$ مع الصفر فنحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\left[l(l-1)+l-m^2\right]A_0=0 \Rightarrow (l^2-m^2)A_0=0$$

$$\left[(l+1)l+(l+1)-m^2\right]A_1=0 \Rightarrow \left[(l+1)^2-m^2\right]A_1=0$$

$$\left[(l+2)(l+1)+(l+2)-m^2\right]A_2+A_0=0 \Rightarrow \qquad (2\text{-}20)$$

$$\left[(l+2)^2-m^2\right]A_2+A_0=0$$

$$\left[(l+k)(l+k-1)+(l+k)-m^2\right]A_k+A_0=0 \Rightarrow$$

$$\left[(l+k)^2-m^2\right]A_k+A_{k-2}=0$$

لندرس المتساوية:

$$\left[(l+k)^2-m^2\right]A_k+A_{k-2}=0$$

يمكن إعادة كتابة ما سبق على الشكل التالي:

$$(l+k+m)\ (l+k-m)\ A_k+A_{k-2}=0$$

وبما أن $A_0 \neq 0$ (عند استبدال $k=0$ و $A\text{-}2=0$) نجد:

$$l^2-m^2=0 \Rightarrow l_1=0 \quad \text{أو} \quad l_2=-m$$

فإذا درسنا الحل $l_1 = m > 0$ نجد من جملة المعادلات (2-20) يمكننا تعيين المعاملات $A_1 \ldots\ldots\ldots A_k$ بينما يبقى A_0 اختيارياً. لنفرض أن $A_0 = 1$ فنجد عندها العلاقة التراجعية التالية:

$$A_k=\frac{-A_{k-2}}{k(k+2m)}$$

نحول k فنجد:

$$
\begin{cases}
A_1 = A_3 = ... = A_{2n+1} = 0 \\
A_2 = \dfrac{1}{2(2m+2)} \qquad\qquad (2-21) \\
A_4 = \dfrac{1}{(2)(4)(2m+2)(2m+4)} \\
\vdots
\end{cases}
$$

وبشكل عام

$$A_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{(2)(4)(6)......(2m)(2m+2)(2m+2)(2m+4)(2m+2n)}$$

نعوض في العلاقة:

$$y = x^l \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

ونجد من أجل الحل الأول y_1 $(l = m)$

$$(1-22)..............y_1 = \left[1 - \frac{x^2}{{}^{2}(2m+2)} + \frac{x^4}{(2)(4)(2m+2)(2m+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{(2)(4)(6)(2m+2)(2m+4)(2m+0)} + ... \right.$$

إن جميع معاملات A_{2n} تتحدد وفق العلاقة *(2-21)* لأنه مهما تكن k فإن معامل A_k في المعاملات *(2-20)* وهي:

$$(l+k)^2 - m^2 \neq 0$$

ولهذا يكون y_1 حلاً خاصاً للمعادلة (2-19)، وبمناقشة مماثلة يظهر أن حالة الجذر $l_2 = -m$ يمكن تحديد كل المعاملات A_k وذلك عندما تتحقق المتباينة:

$$(l+k)^2 - m^2 \neq 0$$

من أجل أي $k > 0$ وزوجي أي:

$$l_2 + k \neq m$$

ولكن $m = l_1$ وبالتالي:

$$l_2 + k \neq l_1$$

أي $l_2 - l_1 \neq k$

حيث $k > 0$ وزوجي وبما أن:

$$l_2 = -m \qquad , \qquad l_1 = m$$

يكون $l_1 - l_2 = 2m$

فإذا كان m غير صحيح يمكننا كتابة الحل الخاص الثاني للمعادلة (2-19) كمايلي:

$$y_2 = x^{-m}\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{x^2}{2(-2m+2)} + \dfrac{x^4}{(2)(4k-2m+2)(-2m+4)} - \\ - \dfrac{x^6}{(2)(4)(6)(-2m+2)(2m+4)(2m+6)} + ... \end{array}\right. \qquad (2-23)$$

نستبدل في هذه العلاقة m بـ$-m$ فنحصل على سلسلة جديدة، وهاتان السلسلتان متقاربتان مهما تكن x (حسب دلامبير).

يمكن أيضاً البرهان على أن y_2, y_1 حلان مستقلان خطياً (بدراسة النسبة y_2, y_1)

بعد ضرب الحل y_1 بثابت نسميه معين بيسيل من النوع الأول والرتبة m ونرمز له بـ J_m،

وكذلك الحل الثاني y_2 ونرمز له بـJ_{-m}

ويكون حل المعادلة (2-19) هو:

$$Y = AJ_m + B\,J_{-m}$$

عند اختيار $m = \frac{1}{2}$ نجد من العلاقات (2-22):

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{(2)(3)} + \frac{x^4}{(2)(4)(3)(5)} - \frac{x^6}{(2)(4)(6)(3)(5)(7)} + ...\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right]$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}\,Sinx$$

وعند اختيار الثابت $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ نجد:

$$y_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}Sinx$$

بنفس الطريقة:

$$y_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}Cosx$$

ويكون الحل العام لـ(2-19) هو:

$$y = Ay_{\frac{1}{2}}(x) + By_{-\frac{1}{2}}(x)$$

وعندما يكون $n = m \geq 0$ صحيحاً فإن المعاملات (*2-23*) يكون لها معنى ، ويعد y_1 حلاً خاصاً ، أما العلاقة الناتجة عن (*2-23*) باستبدال m بـ $-m$ فليس لها معنى لانعدام أحد مقاماتها.

وتكون دالة بيسيل من أجل $m = n > 0$ كمايلي:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{(2)(2n+2)} + \frac{x^4}{(2)(4)(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{(2)(4)(6)(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots\ldots\ldots \right.$$

أي:

$$J_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(\lambda+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}$$

ولإيجاد الحل الخاص الثاني نبحث عنه بالصورة التالية:

$$J`_n(x) = J_n(x)\ln(x) + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k$$

نعوض في المعادلة (*2-19*) ونعين الثوابت B_k والتابع $J_n'(x)$ بعد ضربه بثابت معين ، ويسمى عندها $J_n(x)$ بتابع بيسيل من النوع الثاني من الرتبة n، ويمثل عندها الحل العام بـ

$$Y = A_1\, J_n(x) + B_1\, J`_n(x)$$

ويمكن الإشارة إلى أن:

$$\lim_{x \to 0} J_n`(x) = \infty$$

ولهذا نضع عند دراسة الحل السابق $B_1 = 0$.

تطبيق:

لتكن لدينا معادلة بيسيل التالية:

$$y``+\frac{1}{x}y`+y=0$$

وبفرض $m = 0$

عين الحل المحقق للشروط الابتدائية.

$X = 0 \Rightarrow y(2) = 2$

$X = 0 \Rightarrow y`(0) = 0$

من علاقة $J_n(x)$ نضع $(n = 0)$ فنجد:

$$J_0(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{(\lambda!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$$

$$J_0(x)=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+............$$

وحسب الشروط الابتدائية:

$Y = 2\,J_0\,(x)$

ملحوظة:

عندما يطلب الحل العام للمعادلة المعطاة نبحث عن الحل الخاص التالي في الشكل:

$$J_0`(x)=J_0(x)\ln x+\frac{x^2}{2^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{6}\right)^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)..............$$

وبعد ضربها بثابت نحصل على دالة بيسيل من النوع الثاني ذات الرتبة الصفرية.

هناك أشكال أخرى مختلفة لتوابع بيسيل لا يتسع المجال لعرضها.

(9.2.2): كثيرات حدود ليجاندر (حدوديات ليجاندر) *Legendre polynomials*:

إن لحدوديات ليجاندر شهرة واسعة لما لها من تطبيقات كثيرة في المسائل الميكانيكية والكهربائية. تعرف هذه الحدوديات بالعلاقة:

$$X_n(x) = B_n \frac{d^n (x^n - 1)}{dx^n}$$

$n = 1,2,3,.........$

حيث B_n ثوابت متعلقة بالمسألة المطروحة وهي تعرف من المسألة نفسها.

إن لهذه الحدوديات (وهي من الدرجة n) n جذراً حقيقياً مختلفاً على الفترة $(-1,1)$.

لنفرض أن $B_n = 1$ (دون أن يؤثر ذلك على عمومية المسألة) يمكن وضع الحدودية $(x^2 - 1)^n$ بالشكل التالي:

$$(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x+1)^n$$

والمشتقات الأولى لها حتى الرتبة $(n-1)$ تقبل $x = \pm 1$ جذراً لها، وحسب نظرية رول فإن المشتق الأول له جذر في الفترة $]-1, 1[$ والثاني له جذران في الفترة نفسها وهكذا.

فإذا طبقنا مرة أخيرة نظرية رول نجد أن المشتق من الرتبة n يقبل n جذراً في الفترة $]-1, 1[$ عند $x = \pm 1$، وبفرض $B_n = 1$ (كما أشرنا) واستناداً لنظرية ليبتز في الاشتقاق المتكرر على الحدوديات ذات الشكل:

$$(x - 1)^n (x+1)^n = (x^2-1)^n$$

نجد:

$$X_n(x) = (n+1)^n \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} + C`_n \frac{d(x+1)}{dx} \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + ... + \frac{d^n (x+1)}{dx^n} (x-1)^n$$

ومن أجل $x = 1$ نجد:

$$X_n(1) = 2^n n!$$

ومن أجل $x = -1$ نجد:

$$X_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$$

نعوض في عبارة $X_n(x)$ فنجد:

$$B_n = \frac{1}{2^n . n!}$$

نرمز بشكل عام لحدوديات ليجاندر بـ $P_n(x)$ علماً بأن $P_n(1) = 1$.

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

وحسب علاقة ليبتز يمكن البرهان على أن حدوديات ليجاندر تحقق:

$$(x^2 - 1) X``_n(x) + 2x X`_n(x) - n(n+1) X_n = 0$$

وهي(المعادلة السابقة) تلعب دوراً هاماً في نظرية حدوديات ليجاندر لنفترض أن $y = (x^2 - 1)^n$ أي:

$$y` = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$$

أي:

$$(x^2 - 1) y` = 2nx (x^2 - 1)^{n-1} (x^2 - 1)$$

$$(x^2 - 1) y` = 2nx y$$

لنأخذ المشتق فيه الرتبة $n + 1$ للمعادلة الأخيرة نجد:

$$(x^2-1)y^{n+2}+(n+1)(2x)y^{(n-1)}+\frac{n(n+1)}{2}(2)y^{(n)}=$$

$$(2nx)y^{n+1} + (n+1)\,(2n)\,y^{(n)}$$

وبسهولة يمكن كتابة:

$$(x^2-1)\,y^{n+2} + (2x)\,y^{n+1}\,.\,n\,(n+1)\,y^{(n)} = 0$$

وعند الضرب بـB_n نحصل على العلاقة:

$$(x^2-1)\,X``_n\,(x) + 2\,x\,X`_n\,(x) - n\,(n+1)\,X_n\,(x) = 0$$

وهو المطلوب.

مسائل محلولة ($10-2-2$) Solved Problems

1 . احسب التكاملات التالية بوساطة التابع غاما:

$$I_1=\int_0^\infty x^3.e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{a-1}.e^{-x}dx$$

بالموازنة نلاحظ $a-1=3 \Rightarrow a=4$

$$I_1=\Gamma(4)=3!=6$$

$$I_2=\int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx=\int_0^\infty x^{a-1}.e^{-x}dx$$

نلاحظ هناك اختلافاً بالأس في التابع e^{-x} لهذا نفرض $2x=z \qquad x=\frac{z}{2} \qquad dx=\frac{dz}{z}$

نلاحظ أن حدود التكامل لا تتغير لهذا بالتبديل نجد:

$$I_2=\int_0^\infty \left(\frac{z}{2}\right)^6.e^{-z}\,\frac{dz}{2}=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty z^6.e^{-z}dz$$

$$=\frac{1}{2^7}\Gamma(7)=\frac{6!}{2^7}$$

$$I_3=\int_0^\infty \sqrt{y}.e^{-y^2}dy=\int_0^\infty y^{a-1}.e^{-y}dy$$

كما نلاحظ الاختلاف بين e^{-y} و e^{-y2} لهذا نفرض:

$$y^2=z \quad \Rightarrow \quad y=z^{\frac{1}{2}} \qquad y^{\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{4}}$$

$$dy=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$I_3=\frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{4}}.e^{-z}.z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2}\int_0^\infty z^{-\frac{1}{4}}.e^{-z}dz$$

$$a-1=-\frac{1}{4} \qquad a=\frac{3}{4}$$

$$I_3=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$I_4=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$$

نفرض $-\ln x=z$ ومنه $x=e^{-z}$ $\quad x=0\Rightarrow z=\infty\ ;\ x=1\Rightarrow z=0$

$dx = -\ e^{-z}\ dz$

$$I_4=-\int_\infty^0\frac{e^{-z}dz}{\sqrt{z}}=\int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}.e^{-z}dz$$

$$I_4=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$I_5=\int_0^\infty z^{-4z^2}dz$$

$$z^{-4z^2}=e^{-y} \quad\Rightarrow\quad y=4z^2\Rightarrow\quad \frac{y}{4}=z^2$$

$$z=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2} \qquad dz=\frac{1}{4}.y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$z=0\rightarrow y=0 \qquad ; \qquad z=\infty\Rightarrow y=\infty$$

$$I_5=\int_0^\infty\frac{e^{-y}}{\frac{1}{4}\sqrt{\ln z}}.y^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{4\sqrt{\ln z}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I_5 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\ln z}}$$

2 . احسب قيمة التكاملات الآتية بوساطة التابع بيتا:

$$J_1 = \int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$a-1=2 \rightarrow a=3 \quad ; \quad b-1=3 \rightarrow b=4$$

$$J_1 = \beta(3,4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2!.3!}{6!}$$

$$J_2 = \int_{x=0}^{x=2} \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

نلاحظ اختلاف حدود التكامل مع حدود التابع $(a, \quad b)\ \beta$ لهذا نجري التحويل

$\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2dt$ وأما حدود التكامل فتصبح:

$$J_2 = \int_0^1 \frac{(2t)^2}{\sqrt{2}.\sqrt{1-t}}.2dt$$

$$J_2 = \sqrt{2}.2^2 \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^2.dt = 2^{\frac{5}{2}} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}\ t^2 dt$$

$a-1=-\frac{1}{2} \quad ; \quad a=\frac{1}{2}$ - $b\text{-}1 = 2 \rightarrow b = 3$

$$J_2 = 2^5\ \beta\left(\frac{1}{2},3\right) = 2^{\frac{5}{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)}$$

$$J_2 = \frac{2^{\frac{5}{2}}.2\sqrt{\pi}}{5.3.1\sqrt{\pi}} = \frac{2^{\frac{7}{2}}}{5!!}$$

$$J_3 = \int_{y=0}^{y=a} y^4 \sqrt{a^4 - y^4}\, dy$$

$$= \int_0^a a^2 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^4}\, y^4 dy$$

$\frac{y}{a} = t$ $\qquad$ $y = a\,t$ $\qquad$ $y = 0 \Rightarrow t = 0$

$y = a \Rightarrow t = 1$

$$J_3 = a^3 \int_0^1 a^4 . t^4 \sqrt{1 - t^4}\, .dt$$

$$= a^7 \int_0^1 t^4 \sqrt{1 - t^4}\, .dt$$

$t^4 = z$ $\qquad$ $t = z^{\frac{1}{4}}$ $\qquad$ $dt = \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} dz$

$$J_3 = a^7 \int_0^1 z (a - z)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} dz$$

$$J_3 = \frac{a^7}{4} \int_0^1 z^{\frac{1}{4}} (1 - z)^{\frac{1}{2}} dz$$

$a_1 = \frac{5}{4}$ $\qquad$ $b_1 = \frac{3}{2}$

$$J_3 = \frac{a^7}{4} \beta\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^7}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}$$

لحساب التكامل التالي:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2m-1}\theta . Sin^{2n-1}\theta \, d\theta$$

نجري التحويل $Sin^2\theta = t$

$$\theta = 0 \rightarrow t = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1$$

$$2Sin\theta \, Cos\theta \, d\theta = dt$$

$$d\theta = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t.(1-t)^m}{\sqrt{t(1-t)}} . \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1} dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\beta(m,n) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

يمكن استخدام النتيجة كدستور.

3- لنحسب التكامل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^7\theta \, d\theta$$

نوازنه مع $I_1 = \int_0^{\pi} Cos^{2m-1}\theta \, Sin^{2n-1}\theta \, d\theta$

فنجد:

$$2m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

$$2n-1=7 \Rightarrow n=4$$

$$I=\frac{1}{2}\beta\left(7,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(7)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(7+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{6!.\sqrt{\pi}}{(13)!!\frac{\sqrt{\pi}}{2^7}}$$

$$=\frac{2^6.6!}{13!!}$$

4- احسب التكامل:

$$J=\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^7}$$

نفرض $y^7 = t$

حدود التكامل لا تتغير لكن:

$$y=t^{\frac{1}{7}} \quad , \quad dy=\frac{1}{7}t^{-\frac{6}{7}}dt$$

$$I=\frac{1}{7}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{6}{7}}}{1+t}\,dt$$

نوازن مع التكامل:

$$I=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy$$

فنجد:

$$a-1=-\frac{6}{7} \qquad a=\frac{1}{7}$$

$$a+b=1\Rightarrow b=\frac{6}{7}$$

$$I=\frac{1}{7}\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{7}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\right)}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{7}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{7}=\frac{\pi}{7Sin\frac{\pi}{7}}$$

تمارين غير محلولة (2 –2 – 11) ***Supplementary Problems***

1 . بوساطة التوابع الخاصة $\Gamma(a)$ و $\beta(a,b)$ احسب التكاملات التالية:

أ . $\int_0^\infty x^7 e^{-x} dx$ ب . $\int_0^\infty x^9 e^{-3x} dx$

ج . $\int_0^\infty \sqrt[3]{y}.e^{-y^3} dy$ د . $\int_0^\infty 5^{-9z^2} dz$

هـ . $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ و . $\int_0^\infty x^{12} e^{-3x^9} dx$

ز . $\int_0^1 x^m (\lg x)^n dx$

مسألة هامة:

2 . برهن على صحة مايلي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2m-1}\theta \; Sin^{2n-1}\theta \; d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

3 . احسب التكاملات التالية:

أ . $\int_0^1 x^6 (1-x)^4 dx$ ، ب . $\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{4-x}} dx$

ج . $\int_0^a y^4 \sqrt{a^2-y^2} \; dy$ ، ء . $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^8\theta \; d\theta$

هـ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^6\theta\, Cos^7\theta\, d\theta$ ، و. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^4\theta\, d\theta$

ز. $\int_0^3 x\sqrt[3]{2^3 - x^3}\, dx$ ، ح. $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^6}$

4. برهن على صحة مايلي:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{6\sqrt{2\pi}}$$

5. برهن أن:

$$\int_0^\infty Cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

توجيه: استخدم تكاملات فرينل.

6. برهن على صحة:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n\,dt = \frac{2^{n+1}n!}{1.3.5............(2n-1)}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2x}}{ae^{3x}+b} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\,a^{\frac{5}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}}$$



الفصل الثالث

تحويلات لابلاس

Laplace Transforms

مقدمة:

ليكن $F(t)$ تابعاً مركباً ذا متحول حقيقي t مستمراً على الفترة $t \in (\alpha , \beta)$ التي قد تكون مفتوحة. نفهم التكامل التالي:

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} F(t)dt$$

بأنه موجود عند وجود هذه النهاية حتى لو كان التابع غير مستمر عند β أو α.

وإذا كانت $t = \gamma$ تمثل نقطة انقطاع حيث $\alpha < \gamma < \beta$ عندما يمكن فهم وجود التكامل

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon} F(t)dt + \lim_{\varepsilon 1 \to 0} \int_{\gamma+\varepsilon 1}^{\beta} F(t)dt$$

مفترضين وجود النهايتين ($\varepsilon \neq \varepsilon_1$ بالحالة العامة).

يمكننا تعميم ذلك في حالة وجود أكثر من نقطة انقطاع، كذلك يمكن تعميم ذلك عندما تكون α أو β أو كلاهما معاً يسعيان إلى ∞ فنكتب:

$$\int_{\alpha}^{\beta=\infty} F(t)dt = \lim_{l \to \infty} \int_{\alpha}^{l} F(t)dt$$

أو

$$\int_{\alpha=-\infty}^{\beta} F(t)dt = \lim_{l\to-\infty} \int_{l}^{\beta} F(t)dt$$

مفترضين وجود هذه النهايات.

وعندها نقول إن كلاً من:

$$\int_{\alpha=-\infty}^{\beta} F(t)dt \qquad , \qquad \int_{\alpha}^{\beta=\infty} F(t)dt$$

هو تكامل متقارب.

وفي غير ذلك فالتكاملات تكاملات متباعدة ، وإذا كان التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} |F(x)|\, dt$ متقارباً (حتى في حالة $\alpha = -\infty$ أو $\beta = +\infty$) نقول إن هذا التكامل متقارب مطلقاً أو بإطلاق.

(2–3–1) تعريف :

ليكن $F(t, \quad S)$ تابعاً (دالة) وسيطيًا وسيط ه $D \quad \in \quad S$ عقدي ومستمر بالنسبة $t \in [\alpha,\infty[$ (ربما عدا بعض النقاط المنعزلة).

إذا كان $\int_{\alpha}^{\beta} F(t,S)dt$ متقارباً على D وكان $\int_{\alpha}^{l} F(t,s)dt$ متقارباً عندما $l \to \infty$ عندها نقول إن $\int_{\alpha}^{\infty} F(t,s)dt$ متقاربٌ بانتظام على D.

(2–3–2) ملحوظة:

. نقول عن قضية إنها محققة على فترة $(\alpha \,,\, \beta)$ باستثناء عدد منته من النقاط المنعزلة إذا لم تكن محققة على عدد محدود من النقاط على أية فترة محدودة مغلقة محتواة في (α, β).

. هناك شروط كافية لتقارب تكامل وسيطي بإطلاق على منطقة D وهي إمكانية إرجاحه (مقارنته) بتكامل حقيقي لتابع غير سالب.

(2–3–3)مبرهنة:

إذا كان $F\ (t,\ s)$ تابعاً مركباً ومستمراً على الفترة $t\ \in [\alpha,\ \infty[$ وكان $S\ \in D$ عقدياً باستثناء عدد محدود من النقاط المنعزلة بالنسبة لـD، وكان $F(t,\ s)$ تحليلياً على D مهما تكن $t\ \in [\alpha,\ \ \infty[$ وبفرض $\int_{\alpha}^{\infty} F(t,s)dt$،مقرون من أجل كل منطقة مغلقة محتواة في D بوساطة تكامل متقارب لتابع غير سالب وحقيقي، عندها يكون كلٌ من التابعين التاليين:

$$\widetilde{F}(s) = \int_{\alpha}^{\infty} F(t,s)dt \qquad , \qquad \widetilde{F}`(s) = \int_{\alpha}^{\infty} F`(t,s)dt$$

تحليلياً على D.

نقبل تلك المبرهنة بدون إثبات.

المقصود بمقرون (مرجوح) بتابع حقيقي غير سالب.

(2–3–4) تعريف :

بفرض $F(t)$ تابعٌ مستمرٌ مقطعياً ومعرفٌ من أجل $t > 0$، فنسمي التكامل (في حال وجوده):

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)dt$$

تحويل لابلاس للتابع $F(t)$ ونرمز له بـ

$$\widetilde{F}(s) = La[F(t)] = \int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)dt \qquad t > 0$$

ملحوظة:

إذا كان $F(t)$ معرفاً من أجل $t \in (0, \alpha)$ عندها لإيجاد تحويل لابلاس لـ$F(t)$ نمدد هذا التابع على الفترة $t \in (0 , \infty)$ حتى يكون التكامل.

$$\int_0^\infty F(t).e^{-st}dt$$

موجوداً.

نصطلح على أن:

$$F(0^+) = \lim_{t\to 0+} F(t)$$

$$F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t)$$

(2–3–5) الشروط الكافية لتحويل لابلاس:

تعريف :

بفرض $F(t)$ تابعاً عقداً مستمراً على الفترة $t \in (0 , \infty)$ ربما عدا بعض النقاط المنعزلة، وإذا كان S_0 أصغر عدد حقيقي يجعل التكامل $\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$ متقارباً ومتباعداً عكس ذلك دعي العدد S_0 الرتبة الأسية للتابع $F(t)$ (وهو أيضاً متقارب مهما تكن $\operatorname{Re} S_1 > S_0$ ومتباعدٌ عكس ذلك).

وإذا كان التكامل السابق متقارباً مهما تكن S عندها دعيت الرتبة ∞ – وإذا كان متباعداً مهما تكن S دعيت الرتبة ∞.

(2–3–6) تعريف :

نقول إن التابع *F(t)* ذو مرتبة أسية γ إذا تحقق:

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-\gamma t}F(t)\right| < M$$

حيث *M* محدود و $0 < \gamma$

إذا كان التابع *F(t)* ذا مرتبة أسية محدودة عندها يكون التكامل:

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

تابعاً تحليلياً من أجل $\mathrm{Re}(s) > S_0$ حيث S_0 الرتبة الأسية لـ*F(t)*.

(2–3–7) تعريف:

نسمي *F(t)* المستمر على (*0*، ∞) [ربما باستثناء عدد من النقاط المنعزلة] (وذا مرتبة أسية S_0 المحدودة) أصلاً للتابع $\tilde{F}(s)$ حيث:

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

ونسمي $\tilde{F}(s)$ صورة الأصل *F(t)*.

(2. 3 .8): بعض الخواص الهامة لتحويل لابلاس:

1 . لنفرض $\tilde{F}_2(s), \tilde{F}_1(s)$ تابعان وسيطيان ومعرفان كما يلي:

$$\widetilde{F}_1(s)=\int_0^\infty e^{-st}F_1(t)dt \quad ; \quad \widetilde{F}_2(s)=\int_0^\infty e^{-st}F_2(t)dt$$

وليكن C_2, C_1 عناصر من حقل مركب C عندها

$$La[C_1(F_1(t))+C_2(F_2(t))]=C_1La[F_1(t)]+C_2La[F_2(t)]$$

البرهان:

واضح من تعريف تحويل لابلاس وخواص التكامل.

2 . بفرض $La[F(t)]=\widetilde{F}(s)$

وبفرض $\alpha>0$ عدد عندها

$$La[F(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}\widetilde{F}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

الإثبات:

حسب التعريف

$$La[F(\alpha t)]=\int_0^\infty e^{-st}F(\alpha t)dt$$

نبدل $\alpha t=z$

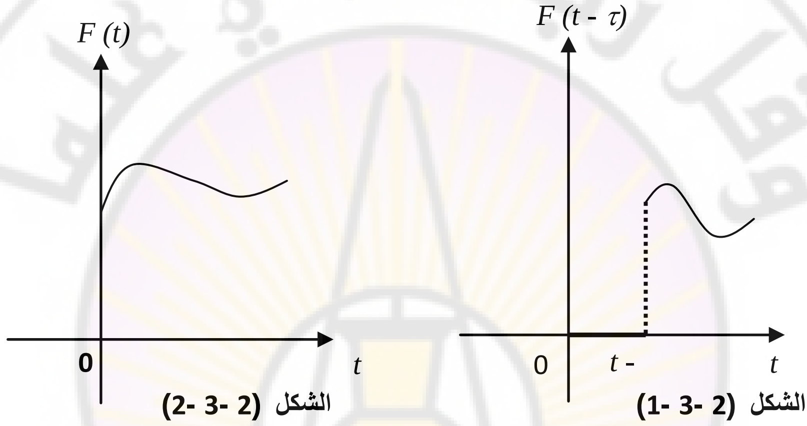
$$dt=\frac{1}{\alpha}dz$$

$$La[F(z)]=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}z}F(z).\,dz$$

$$La[F(t\,\alpha)] = \frac{1}{\alpha}\tilde{F}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

3 . بفرض $\tilde{F}(s) = La[F(t)]$ وبفرض $\tau > 0$ وإذا كان: $F(t) = 0$ من أجل $t < \tau$ عندها:

$$La[F(t-\tau)] = e^{-s\tau}\,\tilde{F}(s)$$



الشكل (2- 3- 2)

الشكل (2- 3- 1)

بفرض $t - \tau = z$ ، $dt = dz$

عندها:

$$La[F(t-\tau)] = \int_0^\infty F(t-\tau).e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\tau}^\infty F(z).e^{-s(\tau+t)}dz$$

$$= \int_{-\tau}^0 F(z).e^{-s(\tau+t)}dz + \int_0^\infty e^{-s\tau}.e^{-st}F(z)dz$$

$$= e^{-\tau s}La[F(t)]$$

$$La[F(t-\tau] = e^{-\tau s}\,\tilde{F}(s)$$

4 . لنعرف التابع

$$U(t) = \begin{cases} 1 \Leftarrow \quad t > 0 \\ 0 \Leftarrow t \le 0 \end{cases}$$

نسمي هذا التابع بتابع هافي سايد، ونلاحظ:

$$La[U(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.1.dt$$

$$La[U(t)] = \frac{1}{s} \qquad U(t) = \begin{cases} 1 \Leftarrow \quad t > 0 \\ 0 \Leftarrow t \le 0 \end{cases}$$

وبذلك نجد:

$$La[F(t)] = \frac{e^{-3s}}{s}$$

5 . لابلاس مشتق تابع:

لنفرض $F(t)$ يحقق شروط تحويل لابلاس، وليكن $\widetilde{F}(s) = La[F(t)]$ ولنحسب لابلاس التابع المشتق $F`(t)$.

هنا نميز حالتين:

أ . المشتق $F`(t)$ مستمر عندها:

$$La[F`(t)] = \int_0^\infty e^{-st} F`(t) dt$$

$$La[F`(t)] = \int_0^\infty e^{-st} d(F(t))$$

$$= e^{-st}F(t)\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$La[F`(t)] = s\,\tilde{F}(s) - F(o^+)$$

يمكن تعميم ذلك : $La[F^{(n)}(t)] = s^n\,\tilde{F}(s) - s^{n-1}F(O^+) .... - F^{(n-1)}(O^+)$

ب . المشتق $F`(t)$ متقطع عند $t = a$ نجد عندها:

$$La[F`(t)] = \int_0^a e^{-st}F`(t)dt + \int_a^{\infty} e^{-st}F`(t)dt$$

نكرر ما سبق فنجد:

$$La[F`(t)] = e^{-st}F(t)\Big|_0^a + \int_0^a e^{-st}F(t)dt + e^{-st}F(t)\Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$= -F(O^+) + e^{-as}F(a^-) - e^{-as}F(a^+) + s\,\tilde{F}(s)$$

$$La[F`(t)] = s\,\tilde{F}(s) - F(O^+) - e^{-as}\left[F(\overset{+}{a}) - F(\overset{-}{a})\right]$$

يمكن تعميم ذلك على أكثر من نقطة انقطاع.

6 . لابلاس $G(t) = \int_0^t F(t)dt$

حيث $\tilde{F}(s) = La[F(t)]$

من التعريف:

$$G`(t) = F(t)$$

$$La[G`(t)] = La[F(t)]$$

$$s\tilde{G}(s) - G(o^+) = \tilde{F}(s)$$

لكن $G(o) = 0$ عندها

$$\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{s}$$

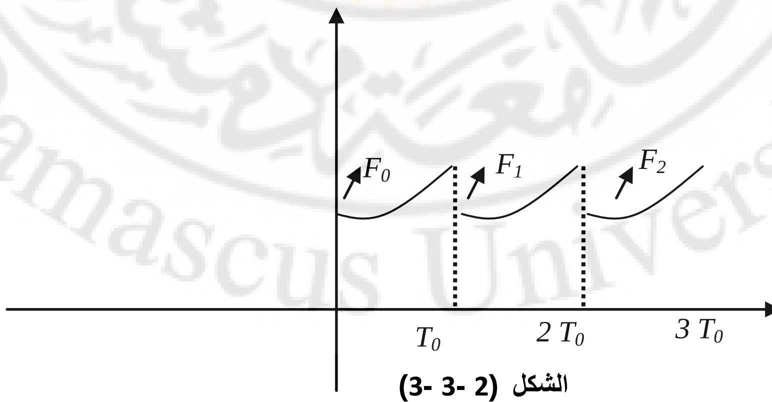
$$La\left[\int_0^t F(t)dt\right] = \frac{\tilde{F}(s)}{s}$$

يمكن تعميم ذلك.

$$La\left[\int_0^t ....\left(\int_0^t F(t)dt\right).dt\right] = \frac{\tilde{F}(s)}{s^n}$$

7 . تحويل لابلاس للتابع الدوري $F(t)$:

لنفرض أن الدور هو T_0 عندها يمكن كتابة $F(t)$ كما يلي:



الشكل (2 -3 -3)

نلاحظ:

$$F(t) = F_0(t) + F_1(t) + ... + F_n(t) + ...$$

حيث:

$$F_0(t) = \begin{cases} F(t) & 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث:

$$F_1(t) = \begin{cases} F(t) & T_0 < t < 2T_0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \Rightarrow \quad F_1(t) = F_0(t - T_0)U(t - T_0)$$

وبشكل عام:

$$F_n(t) = \begin{cases} F(t) & nT_0 < t < (n+1)T_0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أي:

$$F_n(t) = F_0(t - nT_0)U(t - nT_0)$$

وبالتالي:

$$La[F(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} La\big[F_0(t - nT_0)U(t - nT_0)\big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{F}(s).e^{-nT_0 s}$$

$$La[F(t)] = \widetilde{F}(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT0s}$$

$$= \widetilde{F}(s)\left[1 + e^{-T_0 s} + e^{-2T_0 s} + ...\right]$$

$$= \frac{\widetilde{F}(s)}{1 - e^{-T_0 s}}$$

لأن ما بين القوسين سلسلة هندسية أساسها $e^{-T_0 s} < 1$

$$La[F(t)] = \frac{\int_0^{T_0} e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-T0s}}$$

8 . مبرهنة القيمة الأولية:

عند وجود النهاية يكون:

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{s \to \infty} s\,\widetilde{F}(s)$$

$$La[F`(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} F`(t) dt$$

$$s\,\widetilde{F}(s) - F(o^+) = \int_0^{\infty} e^{-st} F`(t) dt$$

نأخذ نهاية الطرفين عند $s \to \infty$

$$\lim_{s \to \alpha} s\,\widetilde{F}(s) - F(\overset{+}{o}) = 0$$

لأن $F`(t)$ مستمر مقطعياً من مرتبة أسية.

$$F(\overset{+}{o}) = \lim_{s \to \infty} s\,\widetilde{F}(s)$$

$$\lim_{t\to o+} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,\tilde{F}(s)$$

9 . مبرهنة القيمة النهائية:

في حال وجود النهاية نجد:

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,\tilde{F}(s)$$

لدينا:

$$La[F`(t)] = s\,\tilde{F}(s) - F(\overset{+}{o})$$

$$\int_0^\infty e^{-st} F`(t)dt = s\,\tilde{F}(s) - F(\overset{+}{o})$$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st} F`(t)dt = \lim_{s\to 0} s\,\tilde{F}(s) - F(\overset{+}{o})$$

$$\int_0^\infty F`(t)dt = \lim_{s\to 0} s\,\tilde{F}(s) - F(o^+)$$

$$F(\infty) - F(o^+) = \lim_{s\to 0} s\,\tilde{F}(s) - F(0^+)$$

$$F(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,\tilde{F}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,\tilde{F}(s)$$

(2 . 3 . 9): تحويل لابلاس لبعض التوابع الأساسية (الدوال الأساسية):

Laplace Transforms of Some elementary Functions

1 . وجدنا أن تابع هافي سايد يعرف كما يلي:

$$U(t)=\begin{cases}1 & \Leftarrow t>0\\ 0 & \Leftarrow t\le 0\end{cases}$$

إذن:

$$La\left[F(t)\right]=\int_0^\infty e^{-st}(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}.1.dt$$

وبالتالي:

$$La\left[F(t)\right]=\frac{1}{s}$$

وبهذا نجد أن أي تابع نريد حساب تحويل لابلاس له يمكن كتابته:

$$F(t)=F(t)U(t)$$

وذلك من أجل $t>0$

2 . تحويل لابلاس للتابع الثابت:

F(t) = a

$$La[a.u(t)]=\frac{a}{s}$$

3 . تحويل لابلاس للتابع الأسي:

$$F(t)=e^{at}U(t)$$

$$La[e^{at}U(t)]=\int_0^\infty e^{-st}.e^{at}.dt=\frac{1}{s-a}$$

4 . تحويل لابلاس للتابع: $F(t)=tU(t)$

$$La[F(t)]=\int_0^\infty e^{-st}.t.dt$$

$$La[tU(t)]=\frac{1}{s^2}$$

5 . تحويل لابلاس للتابع:

F(t) = Sin atU (t)

$$La[Sinatu(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{-iat}-e^{-iat}}{2i}dt$$

$$La[Sinatu(t)]=\frac{a}{s^2-a^2}$$

6 . تحويل لابلاس للتابع:

$$F(t)=CosatU(t)$$

$$La[Cosat.u(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{-iat}+e^{-iat}}{2}dt$$

$$La[Cosat.u(t)]=\frac{S}{S^2+a^2}$$

7 . تحويل لابلاس للتابع:

$$F(t)=ShatU(t)$$

$$La[F(t)] = \frac{a}{S^2 - a^2}$$

8 . تحويل لابلاس للتابع:

$$La[F(t)] = \frac{S}{S^2 - a^2}$$

9 . تحويل لابلاس للتابع:

$$F(t) = t^c U(t)$$

$$La[t^c.U(t)] = \int_0^\infty e^{-st}.t^c dt$$

نفرض $st = \tau$

$$t = \frac{\tau}{s} \qquad dt = \frac{d\tau}{s}$$

$$La\left[t^c u(t)\right] = \int_0^\infty e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^c \frac{d\tau}{s}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\tau} \quad \tau^c \ d\tau}{S^{c+1}}$$

$$La[t^c.u(t)] = \frac{\Gamma(c+1)}{S^{c+1}}$$

وعندما $c = n$ نجد:

$$La\left[t^n u(t)\right] = \frac{\Gamma(n+1)}{S^{n+1}} = \frac{n!}{S^{n+1}}$$

(2 .3 . 10): التحويل المعاكس لتحويل لابلاس (مقلوب تحويل لابلاس):

The Inverse Laplace Transform:

فيما سبق ذكره ذكرنا تحويل لابلاس وتحويلات لابلاس لبعض التوابع الأساسية المعروفة سوف ندرس المسألة العكسية ، أي لنفرض لدينا تابع ما $\tilde{F}(s)$ والمطلوب إيجاد التابع $F(t)$ المحقق لـ:

$$\tilde{F}(s) = La[F(t)]$$

سوف نسمي $F(t)$ أصل $\tilde{F}(s)$ و $\tilde{F}(s)$ صورة $F(t)$.

إن هذه العملية تدعى عملية إيجاد تحويل لابلاس العكسي $F(t)$. سوف ندرس حالات خاصة ثم ننتقل إلى الطريقة العامة لإيجاد التحويل العكسي $F(t)$.

1 . إيجاد أصل التحويل $\tilde{F}(s+\mu)$

لدينا:

$$\tilde{F}(s) = La[F(t)]$$

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

لنبدل في العلاقة الأخيرة (والصحيحة مهما تكن S) كل S بـ $S+\mu$ نجد:

$$\tilde{F}(s+\mu) = \int_0^\infty e^{-(s+\mu)t} F(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} . e^{-\mu t} F(t) dt$$

$$\tilde{F}(s+\mu) = La[e^{-\mu t} F(t)]$$

تطبيق:

بفرض

$$F(t) = e^{3t} S\text{int} U(t)$$

$$La[F(t)] = La[S\text{int}]_{s \to s-3}$$

$$La[F(t)] = \frac{1}{(s-3)^2 + 1}$$

2 . إيجاد أصل التابع $\tilde{F}^{(n)}(s)$

لدينا:

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\tilde{F}`(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t) F(t) dt$$

$$\tilde{F}``(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t)^2 F(t) dt$$

$$\tilde{F}^{(n)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t)^n F(t) dt$$

$$\widetilde{F}^{(n)}(s) = La[(-1)^n t^n F(t).U(t)]$$

$$La^{-1}\left[\widetilde{F}^{(n)}(s)\right] = (-1)^n t^n F(t).u(t)$$

تطبيق:

أوجد تحويل لابلاس:

$F(t) = t\ Cost\ U\ (t)$

$$La[F(t)] = -La[CostU(t)]$$

$$= -\left[\frac{S}{s^2+1}\right]^{`}$$

$$= -\left[\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$La[F(t)] = \frac{S^2-1}{(S^2+1)^2}$$

3 . إيجاد أصل التابع $\int_s^{\infty} \widetilde{F}(s)\, ds$

لدينا $\widetilde{F}(s) = La[F(t)]$

$$\widetilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\int_s^{\infty} \widetilde{F}(s)ds = \int_s^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)dt\right) ds$$

ضمن شروط تحليلية نفترض تحققها نبدل الترتيب بين إشارتي التكامل أي نبدأ أولاً بالمكاملة بالنسبة لـ S ثم بالنسبة لـ t فنجد:

$$\int_s^\infty \widetilde{F}(s)ds = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-st} F(t)ds \right) dt$$

$$= \int_0^\infty (-\frac{e^{-st} F(t)}{t} F(t) \Big|_S^\infty) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{F(t)}{t} dt$$

$$\int_S^\infty \widetilde{F}(s)ds = La\left[\frac{F(t)}{t} u(t) \right]$$

تطبيق:

احسب لابلاس التابع $F(t) = \frac{S\,\text{int}.u(t)}{t}$

$$La\left[\frac{S\,\text{int}}{t} .u(t) \right] = \int_s^\infty La[S\,\text{int}]\, ds$$

$$= \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1}$$

$$= tg^{-1}s \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}S$$

ملحوظة:

يمكن إيجاد تحويل لابلاس العكسي لبعض التوابع بشكل مباشر إذا كانت تتشابه مع بعض الدساتير فمثلاً:

$$La^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=\frac{1}{2}Sin^2tu(t)$$

$$La^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]=Cos3t.u(t)$$

$$La^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]=La^{-1}\left[\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right]$$

$$=\int_0^t La^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]dt$$

$$=\int_0^t \sin t\, dt$$

$$=-Cost\ \Big|_0^t=(1-Cost)u(t)$$

(2 . 3 . 11): الطرق العامة لتحويل لابلاس العكسي:

بفرض $g_2(s), g_1(s)$ حدوديتان بـS ذات أمثال حقيقية وليس بينهما عوامل مشتركة وليكن:

$$\tilde{F}(s)=\frac{g_1(s)}{g_2(s)}$$

كسراً جبرياً بسيطاً. لنوجد التحويل المعاكس لـ $\tilde{F}(s)$:

هنا نميز الحالات التالية:

أ . لـ $g_2(s)$ m جذراً بسيطاً α_m......... α_1 عندها كما نعلم يمكن كتابة $\tilde{F}(s)$ كما يلي:

$$\widetilde{F}(s)=\frac{A_1}{s-\alpha_1}+\frac{A_2}{s-\alpha_2}+............+\frac{A_m}{s-\alpha_m}$$

وبسهولة نجد:

$$La^{-1}\left[\widetilde{F}(s)\right]=\left(A_1e^{\alpha 1t}+A_2e^{\alpha 2t}+...................+A_me^{\alpha mt}\right)u(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}A_i.e^{\alpha it}U(t)$$

تطبيق:

$$\widetilde{F}(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$\widetilde{F}(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

$$A=\lim_{s\to-2}(s+2)\widetilde{F}(s)=1$$

$$B=\lim_{s\to-3}(s+3)\widetilde{F}(s)=-1$$

$$\widetilde{F}(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$F(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\,U(t)$$

ب . عندما توجد جذور مضاعفة لـ $g_2(s)$

لنفرض $S=\alpha$ جذر مكرر m مرة عندها:

$$g_2(S) = (S-\alpha)^m d(s)$$

حيث $0 \neq d(\alpha)$

$$\widetilde{F}(s) = \frac{g_1(s)}{g_2(s)} =$$

$$= \frac{A_0}{(s-\alpha)^m} + ... + \frac{A_{m-1}}{s-\alpha} + E(s)$$

حيث $E(\alpha) \neq 0$

$$\widetilde{F}(s) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{A_i}{(s-\alpha)^{m-1}} + E(s)$$

وكما نعلم تتعين الثوابت A_i كما يلي:

$$A_i = \frac{1}{(i)!} \lim_{s \to \alpha} \left[(s-\alpha)^m \widetilde{F}(s) \right]^{(i)} \qquad i = 0, 1, ..., m-1$$

حيث (i) تعني الاشتقاق i مرة.

$$La^{-1}\left[\widetilde{F}(s) \right] = \sum_{k=1}^{m} A_{k-1} \frac{t^{m-k}}{(m-k)!} e^{\alpha t} u(t) + F_1(t)$$

حيث $F_1(t) = La^{-1}[E(s)]$

تطبيق:

أوجد تحويل لابلاس العكسي لـ:

$$\widetilde{F}(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$=\frac{A}{s-1}+\frac{B_0}{(s-2)^2}+\frac{B_1}{(s-2)}$$

$$A=\lim_{s\to 1}(s-1)\,\widetilde{F}(s)=1$$

$$B_0=\lim_{s\to 2}(s-2)^2\,\widetilde{F}(s)=1$$

$$B_1=\lim_{s\to 2}\left[(S-2)^2\,\widetilde{F}(s)\right]^{`}$$

$$=\left.\frac{-1}{(s-1)^2}\right|_{s=2}=-1$$

$$\widetilde{F}(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{(s-2)}$$

$$F(t)=La^{-1}\left[\widetilde{F}(s)\right]=\left(e^{t}+te^{2t}-e^{2t}\right)U(t)$$

ج . عند وجود جذور عقدية لـ$g_2(s)$ مثل:

يكون $\overline{S_1}=\alpha-i\beta$ الجذر الموافق.

إذا كررنا ما سبق نجد عندها أن $\widetilde{F}(S)$ يمكن كتابته:

$$\widetilde{F}(S)=\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+E(s)$$

لأن:

$$g_2(s) = \left[(s-s_1)(s-\bar{s}_1)\right] E(s)$$

ويمكن تعيين كلٍ من A, B كما يلي:

$$\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right] F(s) = [As+B] + [(s-\alpha)^2+\beta^2]\, E(s)$$

نعوض S بـ $a+i\beta$ ونطابق بين الأقسام الحقيقية والوهمية بين الطرفين نجد:

$$Aa + B = k \qquad \beta A = L$$

حيث k, L معلومة عندها:

$$A = \frac{L}{\beta} \qquad , \qquad B = K - \alpha \frac{L}{\beta}$$

إذا عوضنا في عبارة $\widetilde{F}(s)$ نحصل على عبارة علمت فيها B, A عندها:

$$\widetilde{F}(s) = \frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + E(s)$$

$$F(t) = La^{-1}[f(s)] = ACos\beta te^{\alpha t} + \frac{Ax+B}{\beta}.e^{\alpha t} Sin\beta t + La^{-1}\left[E(s)\right]$$

أي عبارة تحوي فيها تابع أسي وتابع مثلثاتي.

تطبيق:

أوجد التحويل المعاكس لـ:

$$\tilde{F}(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$\Delta = 1 - 4 = 3$$

$$S_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$S_2 = -1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\tilde{F}(s) = \frac{A}{\left(S + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{B}{\left(S + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$F(t) = \left(A\, e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t} + B\, e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t}\right) U(t)$$

$$= \left(A\, e^{-\frac{t}{2}t} . e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + B\, e^{-\frac{t}{2}} . e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) U(t)$$

$$= (A\, e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}} + B\, e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}) . e^{-\frac{t}{2}} U(t)$$

يمكن تعيين B, A وتحويل العبارة إلى عبارة مثلثية مضروبة بتابع أسي.

ء . عندما يكون لـ $g_2(s)$ جذور عقدية مكررة تكرر ما سبق في ب و ج.

(12-3-2) مبرهنة الطي *The Convolution Theorem*:

بفرض $\tilde{F}_2(s) = La[F_2(t)]$; $\tilde{F}_1(s) = La[F_1(t)]$ عندها

$$La^{-1}\left[\tilde{F}_1(s).\tilde{F}_2(s)\right]=\int_0^t F_1(u)\,F_2(t-u)\,du$$

$$=\int_0^t F_2(u)F_1(t-u)du$$

الإثبات:

إن المطلوب يكافئ القول:

$$La\left[\int_0^t F_1(u)F_2(t-u)du\right]=\tilde{F}_1(s),\tilde{F}_2(s)$$

لدينا:

$$\tilde{F}_1(s)=\int_0^\infty e^{-su}F_1(u)\,du$$

نضرب الطرفين بـ $\tilde{F}_2(s)$ وهو غير متعلق بـ u

$$\tilde{F}_1(s).\tilde{F}_2(s)=\int_0^\infty e^{-su}\,\tilde{F}_2(s)\,F_1(u)\,du$$

لكن:

$$e^{-su}\,\tilde{F}_2(s)=La\left[F_2(t-u)\right]$$

لهذا:

$$\tilde{F}_1(s),\tilde{F}_2(s)=\int_0^\infty La\left[F_2(t-u)\right]F_1(u)\,du$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} \; F_2(t-u) \; dt \right) F_1(u) \; du$$

ضمن شروط تحليلية نفترض وجودها وتحققها نبدل بين إشارتي التكامل فنجد:

$$\tilde{F}_1(s), \tilde{F}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^{\infty} F_2(t-u) \; F_1(u) \; du \right) dt$$

لكن $F_2(t-u) = 0$ من أجل $u > t$ لهذا:

$$\tilde{F}_1(s), \tilde{F}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^{t} F_2(t-u) \; F_1(u) \; du \right) dt$$

$$\tilde{F}_1(s), \tilde{F}_2(s) = La\left[\int_0^{t} F_2(t-u) \; F_1(u) \; du \right]$$

$$La^{-1}\left[\tilde{F}_1(s), \tilde{F}_2(s) \right] = \int_0^{t} F_2(t-u) \; F_1(u) \; du$$

إن مبرهنة الطي تستخدم من أجل إيجاد التحويل اللابلاسي المعاكس للتابع $\tilde{F}(s)$ باستخدام الخوارزمية التالية:

1 . نحلل $\tilde{F}(s)$ إلى جداء تابعين $\tilde{F}_1(s)$ و $\tilde{F}_2(s)$.

2 . نوجد $F_1(u) = La^{-1}\left[\tilde{F}_1(s) \right]$, $F_2(u) = La^{-1}\left[\tilde{F}_2(s) \right]$

3 . نطبق المبرهنة.

تطبيق:

أوجد مقلوب تحويل لابلاس (المعاكس) لـ:

$$\widetilde{F}(s)=\frac{S}{(S^2+1)^2}$$

$$\widetilde{F}_1(s)=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$\widetilde{F}_1(s)=\frac{s}{s^2+1} \quad \widetilde{F}_2(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

$F_1(u) = Cos\ u$ $\qquad$ $F_2(u) = Sin\ u$

نختار أحد التابعين $F_2(u)$ أو $F_1(u)$ ونقوم بإزاحة t على أحدهما وليكن $F_2(u)$ أي نأخذ التابع $Sin(t-u)$ وبعدها.

$$La^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\int_0^t Sin(t-u)Cos\ u\ du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left[S\,\text{int}+Sin(t-2u)\right]\right]du$$

$$=\frac{1}{2}tS\,\text{int}+\frac{1}{4}Cos(t-2u)\Big|_0^t$$

$$La^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\frac{t}{2}\sin t$$

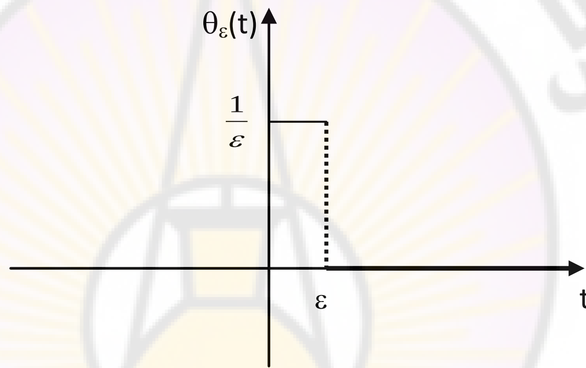
(2-3-13) تحويل لابلاس لبعض التوابع الخاصة:

Laplace Transforms for Some Special Functions:

1 . التوابع النبضية:

لنعرف التابع $\theta_\varepsilon(t)$ كما يلي:

$$\theta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & 0<t<\varepsilon\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$



الشكل (2 -3 -4)

نلاحظ أن هذا التابع تكون قيمته كبيرة أكثر كلما كانت ε أصغر ويمكن تشبيهه بقوة كبيرة $\dfrac{1}{\varepsilon}$ تؤثر لفترة قصيرة ε ونلاحظ أيضاً:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta_2 d\theta \;=\int_0^{\varepsilon}\theta_\varepsilon(t)dt=1$$

لنعرف أيضاً التابع $\delta(t)$ المسمى بتابع ديراك وهو يعرف كنهاية للتابع $\theta_\varepsilon(t)$ عندما $\varepsilon\to 0$ فنجد:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \Leftarrow t = 0 \\ 0 \Leftarrow t \neq 0 \end{cases}$$

ونجد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \theta_{\varepsilon}(t)\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{\varepsilon} \theta_{\varepsilon}(t)\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} . \varepsilon = 1$$

وهذا التابع $\delta(t)$ يستخدم كعملية فيزيائية حدية ذات قيمة متناهية في الكبر عندما تطبق على فترة متناهية في الصفر بشكل نبضة واحدة.

من تعريف التابع $\theta_{\varepsilon}(t)$ يمكن كتابة مايلي:

$$\theta_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2}\left[U(t) - U(t - \varepsilon)\right]$$

نلاحظ:

$$La[\theta_{\varepsilon}(t)] = \frac{1}{\varepsilon} La[U(t)] - \frac{1}{\varepsilon} La[U(t - \varepsilon)]$$

$$= \frac{1}{s\varepsilon} - \frac{e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}$$

$$La[\theta_{\varepsilon}(t)] = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon\, s}$$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \theta_{\varepsilon}(t)$$

$$La[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon\to 0} La[\theta_\varepsilon(t)]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon\, s}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{s\, e^{-\varepsilon s}}{s}$$

$$La[\delta(t)] = 1$$

كذلك نرى:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \theta_\varepsilon(t)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U(t)-U(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\delta(t) = U`(t)$$

وحسب خواص لابلاس مشتق تابع:

$$La[\delta(t)] = La[U`(t)]$$

$$= La[U(t)] - U(0)$$

$$La[\delta(t)] = \frac{S}{s} = 1$$

2 . تحويل لابلاس للتابع $F(t) = \ln t$ حيث $t>0$

اعتماداً على النهاية التالية:

$$\lim_{t\to 0}(t\ln t - t) = 0$$

لأن:

$$\lim_{t\to 0} t(\ln t - 1) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln t - 1}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

نجد بتطبيق خاصة مشتق لابلاس:

$$La[t \ln t] = -\tilde{F}'\ (s)$$

$$\tilde{F}(s) = La[\ln t] \qquad \text{حيث}$$

$$La[t \ln t - t] = La[t \ln t] - La[t]$$

$$La[t \ln t - t] = -\tilde{F}`(s) - \frac{1}{s^2}$$

لكن

$$La[(t \ln t - t)`] = sLa[t \ln t - t] - [t \ln t - t]_{t=0}$$

$$= S\left[\left(-\tilde{F}'(s)\right) - \frac{1}{S^2}\right]$$

$$La[(t \ln t - t)`] = -s\tilde{F}`(s) - \frac{1}{S}$$

$$\tilde{F}(s) + s\tilde{F}`(s) = -\frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad \left[s\tilde{F}(s)\right]_s` = -\frac{1}{s}$$

نكامل:

$$C + s\tilde{F}(s) = -\ln s$$

$$s\,\widetilde{F}(s) = -\ln s - c$$

$$\widetilde{F}(s) = -\frac{\ln s + c}{s}$$

من أجل: $s = 1$ نجد:

$$\widetilde{F}(1) = -C$$

حيث:

$$C = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \; dt = 0.573$$

$$La[\ln t . U(t)] = -\frac{hs + 0.577}{S}$$

3 . تحويل لابلاس للتابع $\delta(t)$:

$$La[\delta i(t)] = La\left[\int_0^t \frac{S\,\mathrm{int}}{t}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{s} La[S\,\mathrm{int}\; u(t)]$$

$$= \frac{1}{s} \int_s^{\infty} \frac{ds}{(s^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{s} tg^{-1} s \Big|_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1} s\right)$$

$$= \frac{ctg^{-1}s}{s}$$

4 . تحويل لابلاس للتابع $Ci(t)$:

$$Ci(t) = -\int_{t}^{\infty} \frac{Cost}{t}\, dt$$

يبرهن أن تحويل لابلاس لتابع التجيب التكاملي هو:

$$La\left[\int_{t}^{\infty} \frac{Cost}{t}\, dt\right] = -\frac{\ln(s^2+1)}{2S}$$

ويبرهن أيضاً أن:

$$La\left[li(e^{+})\right] = -\ln\left(\frac{s-1}{s}\right)$$

حيث $li\ (e^{+})$ تابع اللغارتم التكاملي.

5 . لقد عرفنا تابع بيسيل من الدرجة n كما يلي:

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \frac{t^6}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + ...\right.$$

هذا التابع له الصفات التالية:

1) $\qquad J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t) \qquad \forall\ n > 0$

2) $$J_{n+1}(t)=\frac{2n}{t}J_n(t)-J_{n-1}(t)$$

3) $$\frac{d}{dt}\left[t^n J_n(t)\right]=t^n J_{n-1}(t)$$

وعندما $n=0$ يكون:

$$J_0^{`}(t)=-J_1(t)$$

4) $$e^{\frac{1}{2}t\left(\frac{u-1}{u}\right)}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(t)u^n$$

والأخير هو التابع المعمم لبيسيل.

5) إن تابع بيسيل يحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$t^2U``(t)+tU`(t)+(t^2-n^2)U(t)=0$$

لنوجد لابلاس $J_0(t)$

حسب التعريف:

$$J_0(t)=1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$La\left[J_0(t)\right]=\frac{1}{s}-\frac{1}{2^2}\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{2^2.4^2}\frac{4!}{s^5}-\frac{1}{2^2.4^2.6^2}\frac{6!}{s^7}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{s^4}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{s^6}\right)+\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$La[J_0(t)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

طريقة ثانية:

إن استخدمنا علاقة تعريف تابع بيسيل من الدرجة n ($n=0$ هنا) كحل للمعادلة التفاضلية التالية:

$$t\ J_0^{``}(t)+J_0^{`}(t)+t\ J_0(t)=0$$

لنطبق تحويل لابلاس على الطرفين آخ ذين بعين الاعتبار أن: $J_0(0)=1$ و $J_0^{`}(0)=0$ وبفرض $Z(S)$ هو $La[J_0(t)]$ نجد:

وبالاختصار نجد:

$$\frac{d\,Z(s)}{ds}=-\frac{s\,Z(s)}{s^2+1}$$

$$\frac{d\,Z(s)}{Z(s)}=-\frac{sds}{s^2+1}$$

$$\ln Z(s)=-\frac{1}{2}\ln(s^2+`)$$

$$\ln Z(s)=\ln\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$Z(s)=\frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

يمكن تعيين الثابت c من مبرهنة القيمة الأولية فنجد:

$$\lim_{s\to\infty} Sz(s) = \frac{c.s}{\sqrt{s^2+1}} = c$$

$$\lim_{t\to 0} J_0(t) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$La[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

وحسب خاصة التحاكي.

$$La[J_0(at)] = \frac{1}{\sqrt{S^2+a^2}}$$

من أجل حساب $La[J_1(t)]$ حيث $J_1(t)$ تابع بيسيل من الدرجة الأولى نجد من الخاصة:

$$J_0^{`}(t) = -J_1(t)$$

$$La[\ J_0^{`}(t)\ ] = -La[\ J_1(t)\ ]$$

$$= -[SLa[J_0(t)] - J_0(0)]$$

$$= +1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$$

(2 . 3 . 14): الصيغة العقدية لتحويل لابلاس العكسي:

The Complex Inversion formula:

بفرض $\widetilde{F}(s) = La[F(t)]$

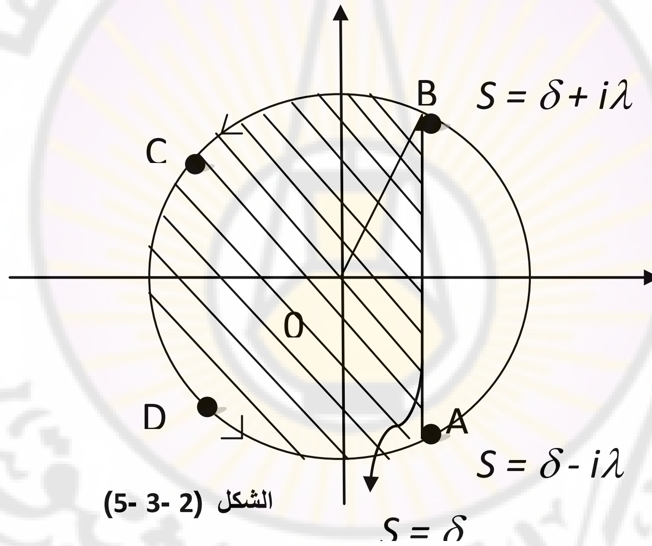
عندها تعطى الصيغة العقدية لتحويل لابلاس العكسي كما يلي:

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st}\,\widetilde{F}(s)\,ds \qquad t>0$$

$F(t)=0$ من أجل $t<0$

هذه الصيغة تعرف أيضاً بصيغة بروموينش.

إن التكامل السابق ينجز في المستوي العقدي (x,y) على المستقيم $x=\delta$ ويختار العدد δ بحيث يقع على يمين كل النقاط الشاذة وهو من جهة أخرى كيفي وفي الطريقة العملية فإن التكامل السابق ينجز على المحيط التالي المسمى محيط بروموينش.



الشكل (2- 3 -5)

إن التكامل السابق يفهم كما يلي:

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\delta-il}^{\delta+il}=\int_{\delta-i\infty}^{\delta+il} \qquad \forall\, l$$

إن محيط بروموينش السابق $ABCDA$ يحقق ما طلب من المنطقة D في الساحة العقدية لإنجاز تكامل الصيغة العقدية لتحويل لابلاس العكسي.

وحسب نظرية الرواسب فإن هذا التكامل:

$$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st}\,\tilde{F}(s)\,ds = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[e^{st}\,\tilde{F}(s), a_j\right]$$

حيث a_j الأقطاب الواقعة داخل محيط بروموينش، بالتالي:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\,2\pi i \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[e^{st}\tilde{F}(s), a_j\right]$$

$$F(t) = \sum_{j=1}^{j=k} \operatorname{Res}\left[e^{st}\,\tilde{F}(s), a_j\right]$$

تطبيق:

أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع:

$$\tilde{F}(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

نلاحظ أن أقطاب التابع:

$S_0 = 0 \qquad S_1 = i \qquad S_2 = -i$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s^2+1)}, 0\right] = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s^2+1)}, i\right] = \frac{e^{+it}}{-i(-2i)} = -\frac{1}{2}.e^{+it}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s^2+1)}, -i\right] = \frac{e^{-it}}{-i(-2i)} = -\frac{1}{2}e^{-it}$$

$$F(t) = \left[1 - \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\right]U(t) = (1 - Cost)\,U(t)$$

(2 . 3 . 15): تطبيقات تحويل لابلاس:

Applications of Laplace Transform:

لتحويل لابلاس تطبيقات عدة:

1 . حساب بعض التكاملات المحددة.

2 . حل بعض المعادلات التفاضلية.

3 . حل جملة معادلات تفاضلية.

4 . حل المعادلات التكاملية.

1 . يمكن استخدام تحويل لابلاس لحساب تكاملات من الشكل:

$$I = \int_0^\infty e^{at} F(t)\, dt$$

حيث يصبح التكامل *I* مساوياً للابلاس التابع *F(t)* من أجل $s = -a$ فمثلاً:

$$I = \int_0^\infty e^{3t} Sin2t\, dt$$

$$I = La[Sin2t\, u(t)]_{s=-3}$$

$$= \left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s=-3} = \frac{2}{9+4} = \frac{2}{13}$$

$$I = \int_0^\infty J_0(t) dt$$

$$= La[J_0(t)]_{s=0} = 1$$

2 . تعطى المعادلة التفاضلية ذات الأمثال الثابتة ومن المرتبة *n* بالعلاقة:

$$Z^{(n)}(t) + \alpha_1 Z^{(n-1)}(t) + \dots\dots\dots + \alpha_{n-1} Z`(t) + \alpha_n Z(t) = F(t)$$

حيث تعطى شروط البدء كما يلي:

$$Z(o) , Z`(o), \dots\dots\dots\dots\dots\dots, Z^{(n-1)}(o)$$

معلومة كذلك الثوابت α_n .... $\alpha_1,$ والتابع *F(t)* معلوم.

لنفرض أن $La[Z(t)] = Z(s)$

لنطبق تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية فنجد علاقة جبرية بـ $Z(s)$ وحدودية $D(s)$ أي:

$$D(s).Z(s) = F(s)$$

ومنه:

$$Z(s) = \frac{F(s)}{D(s)}$$

ومنه:

$$Z(t) = La^{-1}\left[\frac{F(s)}{D(s)}\right]$$

تطبيق:

أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية:

$$Z``(t) - 3\,Z`(t) + Z(t) = t$$

$$Z(0) = Z`(0) = 0$$

الحل:

$$S^2 Z(s) - S(0) - Z`(0) - 3[S\,Z(s) - Z(0)] + Z(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(S^2 - 3s + 1)\,Z(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Z(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 3s + 1)}$$

حسب الصيغة العقدية نجد:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{2} \operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s^2 - 3s + 1)}, a_j\right]$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{st} F(s), 0\right] = 1$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{st} F(s), \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{4}{15+5\sqrt{5}}.e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}2}{2}\right)t}$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{st} F(s), \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{4}{15-5\sqrt{5}}.e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)t}$$

$$F(t) = 1 + 4\left[\frac{1}{15+5\sqrt{5}}\, e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)t} + \frac{1}{15-5\sqrt{5}}\, e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}\right]$$

في بعض الأحيان عندما تصبح رتبة المعادلة التفاضلية عالية عندها يصعب تطبيق الطريقة السابقة لأن عملية إيجاد (تفريق الكسر) جذور $D(s)$ عملية صعبة لهذا نلجأ لما يلي:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية المطلوب حلها مكتوبة بالشكل التالي:

$$Z^{(n)}(t)+\alpha_1 Z^{(n-1)}(t)+\alpha_2 Z^{(n-2)}(t)+.........+\alpha_{n-1}Z`(t)+\alpha_n Z(t)=F(t)$$

ولنفرض أن:

$$Z(0),\quad Z`(0),\quad Z^{(n-2)}, Z^{(n-1)}(0), F(t)$$

كميات معلومة.

وأن $Z(t)$ هو التابع المجهول.

لنجرِ تغيير تسمية المجهول $Z(t)$ كما يلي:

$$x_1(t)=Z(t)$$

n معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

$$\begin{cases} x_1(t)=Z(t) \\ x_1(t)=x_2(t) \\ x_2^1(t)=x_3(t) \\ x_3^1(t)=x_4(t) \\ x_{n-1}(t)=x_n(t) \\ x_n^{`}(t)=-\alpha_n x_1-\alpha_{n-1}x_2..........\alpha_1 x_4+F(t) \end{cases}$$

يمكن كتابة جملة المعادلات السابقة بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2^1(t) \\ \vdots \\ x_n^1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & -\alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F(t) \end{bmatrix}$$

وهذا يكتب بشكل مختصر:

$$X`(t) = Ax(t) + B(t)$$

حيث:

$$X`(t) = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ F(t) \end{bmatrix}$$

لنطبق على المعادلة التفاضلية الخطية المصفوفية الأخيرة تحويل لابلاس فنجد:

$$La[x`(t)] = ALa[x(t)] + La[B(t)]$$

$$S\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B(s)$$

حيث:

$$La[x(t)] = X(s)$$

$$La[B(t)] = B(s)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(0) \\ Z`(0) \\ \vdots \\ Z^{n-1}(0) \end{bmatrix}$$

$$S\,X(s) - A\,X(s) = x(0) + B(s)$$

$$[SI - A]\,X(s) = [x(0) + B(s)]$$

المصفوفة الواحدية من الدرجة n

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X(s) = [SI - A]^{-1}\,[x(0) + B(s)]$$

وبأخذ التحويل المعاكس للطرف الثاني ثم اختيار السطر الأول منه نجد التابع المجهول $Z(t)$.

تطبيق:

أوجد حل المعادلة التفاضلية العادية الخطية التالية بعد ردها إلى معادلتين تفاضليتين خطيتين من المرتبة الأولى:

$$Z``(t) - 3\,Z`(t) + 2\,Z(t) = t \qquad t > 0$$

حيث $Z(0) = Z`(0) = 0$

$$x_1 = Z$$

$$x_1^1(t) = x_2(t)$$

$$x_2^1(t) = -2x_1 + 3x_2 + t$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلة:

$$X`(t) = A\, X(t) + B(t)$$

نجد:

$$X(s) = [SI - A]^{-1} \left[X(0) + B(s) \right]$$

حيث:

$$X(s) = La[X(t)]$$

$$B(s) = La[B(t)]$$

$$[SI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$[SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s-3}{(s-1)(s-2)} & \frac{1}{(s-1)(s-2)} \\ \frac{-2}{(s-1)(s-2)} & \frac{s}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}$$

$$[X(0) + B(0)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$X(s)=\begin{bmatrix}\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} & \frac{1}{(s-1)(s-2)}\\ \frac{-2}{(s-1)(s-2)} & \frac{s}{(s-1)(s-2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{s^2}\end{bmatrix}$$

$$X(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2(s-1)(s-2)}\\ \frac{1}{s(s-1)(s-2)}\end{bmatrix}$$

$$Z(t)=X_1(t)=La^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)(s-2)}\right]$$

$$=A_0La^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+A_1La^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+BLa^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+CLa^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

بتعيين الثوابت بالطرق المعروفة نجد:

$A_0=\frac{1}{2}$ $\quad A_1=\frac{3}{4}$ $\quad B = -1$, $C=\frac{1}{4}$

$$Z(t)=\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}-e^{t}+\frac{1}{4}e^{2t}\right)U(t)$$

3 . حل جملة معادلات تفاضلية خطية:

إن حل مثل هذه الجملة يعتمد على الحالة السابقة، ولنتبع الخوارزمية التالية:

أ . نطبق تحويل لابلاس على كل معادلة تفاضلية من الجملة السابقة (وهي بأكثر من تابع مجهول).

ب . نحصل بذلك على جملة معادلات جبرية بعدة مجاهيل نحلها بالطريقة المناسبة.

ج . نطبق مقلوب تحويل لابلاس على الحلول فنحصل على حل الجملة.

تطبيق:

حل جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$Z`(t) - X`(t) = Sin\ t$$

$$Z`(t) + X`(t) = Cos\ t$$

حيث $Z(0) = X(0) = 1$

$$La[Z`(t)] - La[X`(t)] = La[Sin\ t]$$

$$S\,Z(s) - Z(0) - S\,X(s) + X(0) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Z(s) - X(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

كذلك

$$La[Z`(t)] + La[X`(t)] = La[Cos\ t]$$

$$S\,Z(s) - Z(0) - S\,X(s) + X(0) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Z(s) + X(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{s}$$

ولحل المعادلتين الجبريتين بـ $Z(s), X(s)$ نجد:

$$Z(s) = \frac{1}{2s(s^2+1)} + \frac{1}{2(s^2+1)} + \frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{2(s^2+1)}-\frac{1}{2(s^2+1)}+\frac{1}{s}$$

وبأخذ التحويل المعاكس للتابعين السابقين نجد:

$$Z(t)=\frac{1}{2}\int_0^t S\,\text{int}\,dt+\frac{1}{2}S\,\text{int}+u(t)$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos t\Big|_0^t+\frac{1}{2}S\,\text{int}+u(t)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}Cost+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S\,\text{int}+1\right)u(t)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3-Cost+S\,\text{int}\right)u(t)$$

$$X(t)=\frac{1}{2}S\,\text{int}+u(t)-\frac{1}{2}\int_0^t Sin\ t\ dt$$

$$X(t)=\frac{1}{2}S\,\text{int}+u(t)-\frac{1}{2}(\cos t\Big|_0^t$$

$$=\left(\frac{1}{2}S\,\text{int}+1+\frac{1}{2}Cost-\frac{1}{2}\right)u(t)$$

$$X(t)=\frac{1}{2}(S\,\text{int}+Cost+1)\,u(t)$$

4 . حل المعادلات التكاملية:

نعرف المعادلة التكاملية لتابع ما $Z(t)$ بأنها علاقة تحوي التابع $Z(t)$ ومشتقاته المختلفة وتكامل ذلك التابع مع غيره من *0* إلى t مثل المعادلة:

$$F(t)Z(t)+\alpha\int_0^t \beta(t,v)Z(\theta)d\theta=F(t)$$

يسمى التابع $\beta(t,\theta)$ نواة المعادلة التي تسمى بمعادلة فولتيرا، أما إذا كان شكل المعادلة:

$$\Gamma(t)Z(t)+\alpha\int_0^t \beta(t,\theta)Z(\theta)d\theta=F(t)$$

حيث α ثابت و $F(t)$ كما في المعادلة السابقة تابع معلوم فإن هذه المعادلة تدعى بمعادلة فردهولم، ومن المعادلات التكاملية الهامة المعادلة الخاصة التالية:

$$Z(t)=F(t)+\int_0^t \beta(t-\theta)Z(0)d\theta$$

وتدعى معادلة فولتيرا من النوع الثاني أما إذا كان لها الشكل:

$$F(t)=\int_0^t \beta(t-\theta)Z(\theta)d\theta$$

فتدعى معادلة فولتيرا من النوع الأول.

إذا طبقنا تحويل لابلاس على معادلتي فولتيرا نجد على الترتيب:

$$Z(s)=\frac{F(s)}{1-\beta(s)}$$

و

$$Z(s)=\frac{F(s)}{\beta(s)}$$

حيث $\beta(s) = La[\beta(t)]$ و $Z(s) = La[Z(t)]$

$$F(s) = La\left[F(t)\right]$$

تطبيق:

أوجد حل المعادلتين التكامليتين التاليتين:

$$Cht = \int_0^t e^{3(t-v)} z(v) dv$$

$$Z(t) - \int_0^t Sin(t-v) Z(v) dv = S\,\text{int}$$

لحل المعادلة الأولى نطبق تحويل لابلاس فنجد:

$$La[Cht] = La\left[\int_0^t e^{3(t-v)} z(v) dv\right]$$

$$\frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{s-3} Z(s)$$

$$Z(s) = \frac{s(s-3)}{s^2-1} = \frac{s^2}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}$$

$$= \frac{s^2-1+1}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}$$

$$Z(s) = 1 + \frac{1}{s^2-1} - 3\frac{s}{s^2-1}$$

$$Z(t) = (1 + Sht - 3Cht)\, u(t)$$

وإذا طبقنا التحويل على المعادلة الثانية:

$$Z(s) - \frac{1}{s^2+1} Z(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Z(s) \frac{(s^2+1-1)}{(s^2+1)} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Z(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Z(t) = tu(t)$$

(2 . 3 . 16): تحويل Z *(Z-Transform)* وعلاقته بتحويل لابلاس:

تعريف:

لتكن $\{a_n\}$ متوالية أعداد عقدية، نعرف تحويل Z لـ$\{a_n\}$ كما يلي:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{-n}$$

حيث Z متحول عقدي.

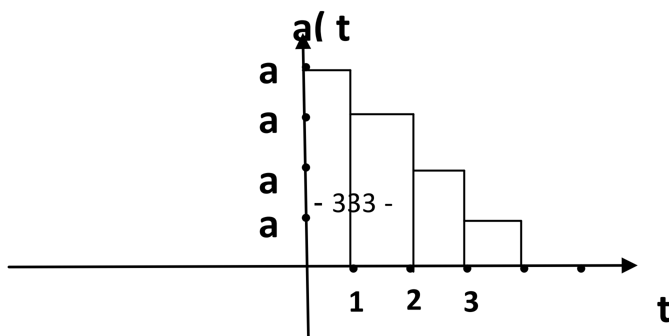
إن هذا التحويل موجود (وهو كما نرى سلسلة لورانت وهي متقاربة من أجل $|Z| > 1$).

يرتبط هذا التحويل مع تحويل لابلاس بالعلاقة التالية:

$$A(z) = \left\{ \frac{s}{1-e^{-s}} La[a(t)] \right\}_{e^s \to Z}$$

أي نبدل $e^S \to Z$

نلاحظ أن $a(t) = a_n$ من أجل $n < t < n+1$ حيث $n = 0,1,2,..........$



الشكل (2 -3 -6)

$$a(t) = a_0[u(t) - U(t-1)] + a_1[U(t-1) - U(t-2)]$$

$$+ a_2[U(t-2) - U(t-3)] + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

وبأخذ تحويل لابلاس

$$La[a(t)] = a_0 \frac{1-e^{-S}}{S} + a_1 \frac{e^{-s} - e^{-2S}}{S} + a_2 \frac{e^{-2S} - e^{-3S}}{S} + \dots\dots\dots\dots$$

$$= a_0\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right) + a_1.e^{-S}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)$$

$$+ a_2.e^{-2S}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right) + a_3.e^{-3S}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right) + \dots\dots\dots\dots$$

$$= \left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)\sum_{0}^{\infty} a_0.e^{-ns}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0.e^{-nS} = \frac{S}{1-e^{-S}} La[a(t)]$$

بفرض $Z = e^S$ حيث $1 < |Z|$

$$\sum_{0}^{\infty} a_n Z^{-n} = \left\{\frac{S}{1-e^{-S}} La[a(t)]\right\}_{e^S \to Z}$$

$$A(z)=\left\{\frac{S}{1-e^{-S}}\,La[a(t)]\right\}_{e^{S}\to Z}$$

وهو المطلوب.



تمارين محلولة (2. 3. 16) Solved Problems

1 . احسب لابلاس التابع:

$$F(t)=\begin{cases}2 & \Leftarrow 0<t<4\\ 0 \Leftarrow 4<t\end{cases}$$

$$La[F(t)]=\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$=\int_0^4 e^{-st}(2)dt+\int_4^{\infty} e^{-st}(0)dt$$

$$=-\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_0^4=\frac{1-2e^{-4s}}{s}$$

2 . احسب لابلاس التابع:

$$F(t)=4e^{3t}+Sin\frac{t}{3}+Cos4t \qquad t>0$$

$$La[F(t)]=\frac{4}{s-3}+\frac{1}{3}\frac{1}{s^2+\frac{1}{9}}+\frac{s}{s^2+16}$$

3 . احسب لابلاس التابع:

$$F(t)=t^2\ e^{3t}$$

$$La[F(t)]=La[t^2]_{s\to s-3}=\frac{2}{(s-3)^3}$$

4 . احسب لابلاس التابع: $F(t)=t^2.\cos t.U(t)$

$F(t) = t^2 \; Cos\; t$

$$La\left[(-t)^n F(t)u(t)\right] = F(s)^{(n)}_{(s)}$$

$$La\left[t^2 Costu(t)\right] = La\left[Cost\right]``$$

$$= \left(\frac{S}{S^2+1}\right)$$

$$= \left[\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right]` = \left[\frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}\right]`$$

$$= \frac{-2s(1+s^2)^2 - 2(2s)(1+s^2)(1-s^2)}{(1+s^2)^4}$$

$$= \frac{-2s-2s^3-4s+4s^3}{(1+s^2)^3}$$

$$= \frac{2s^3-4s}{(1+s^2)^3} = \frac{2s(s^2-2)}{(1+s^2)^3}$$

5 . أوجد لابلاس التابع الدوري:

$$F(t) = \begin{cases} S\text{int} & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

نلاحظ أن دور التابع $T_0 = 2\pi$

$$La[F(t)] = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st} F(t)dt}{1-e^{-2\pi s}}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} e^{-st} S\text{int}\, dt}{1-e^{-2\pi s}}$$

$$I = \int_0^{\pi} e^{-st} S\,\text{int}\, dt$$

$u = Sin\ t$ $\qquad du = Cos\ t\ dt$

$e^{-st}\ dt = dv$ $\qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$

$$I = -\frac{e^{-st} S\,\text{int}}{s}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{s}\int_0^{\pi} e^{-st} Cost\ dt$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{-st} Costdt$$

$u_1 = Cos\ t$ $\qquad d\ u_1 = -\ Sin\ t\ dt$

$e^{-st}\ dt = dv$ $\qquad v = -\frac{1}{s}.e^{-st}$

$$I_1 = -Cost\ e^{-st}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} S\,\text{int}\ dt$$

$$I_1 = e^{-st} - 1 - \frac{1}{s} I$$

$$I_1 = \frac{1}{s}\left[e^{-\pi s} - 1 - \frac{1}{s} I\right] = \frac{e^{-s\pi} - i}{s} - \frac{1}{s^2} I$$

$$I\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{e^{-s\pi} - 1}{s}$$

$$I = \frac{s(e^{-s\pi} - 1)}{s^2+1}$$

$$I\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)=\frac{e^{-s\pi}-1}{s}$$

$$I=\frac{s(e^{-s\pi}-1)}{s^2+1}$$

$$La[F(t)]=\frac{s(e^{-s\pi}-1)}{(s^2+1)(1-e^{-2\pi s})}$$

$$La[F(t)]=\frac{-s}{(s^2+1)(1+e^{-s\pi})}$$

6 . احسب التكاملات التالية بوساطة تحويل لابلاس:

$$I_1=\int_0^\infty t.e^{-5t}Cost\ dt$$

$$=La[t\cos t\ u(t)]_{s=5}$$

$$=\left\{-\left[\frac{S}{S^2+1}\right]'\right\}_{s=5}$$

$$=-\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\Bigg|_{s=5}=-\frac{1-25}{676}$$

$$=\frac{24}{676}=\frac{6}{169}$$

$$I_2=\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt$$

$$=La\left[\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right]_{s=0}$$

$$=\left\{\int_0^{\infty} La\left[e^{-t}-e^{-3t}\right]ds\right\}_{s=0}$$

$$=\left\{\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)ds\right\}_{s=0}$$

$$=\left\{\ln\left.\frac{s+1}{s+3}\right|_s^{\infty}\right\}_{s=0}$$

$$=-\ln\frac{1}{3}=\ln 3$$

7 . حل المعادلة التفاضلية التالية بوساطة تحويل لابلاس:

$$Z``(t)+Z`(t)+Z(t)=u(t)$$

حيث $Z(0)=Z`(0)=2$

$$La[Z``]+La[Z`]+La[Z]=\frac{2}{s}$$

$$S^2 Z(s)-SZ(0)-Z`(0)+S Z(s)-Z(0)+Z(s)=\frac{2}{s}$$

$$Z(s)(s^2+s+1)=\frac{2}{s}+2s+4$$

$$Z(s)=\frac{2}{s(s^2+s+1)}+\frac{2s}{s^2+s+1}+\frac{4}{s^2+s+1}$$

$$\frac{2}{s(s^2+s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}$$

بالمطابقة تتعين الثوابت $A=2;\quad B-2,\quad C=-2$

$$\frac{2}{s(s^2+s+1)}=\frac{2}{s}-\frac{2s+2}{s^2+s+1}$$

$$=\frac{2}{s}-2\frac{s+1}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}$$

$$=\frac{2}{s}-2\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2}{s}-2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-2\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$La^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+s+1)}\right]=U(t)+\left(-2Cos\frac{\sqrt{3}}{2}te^{-\frac{t}{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}Sin\frac{\sqrt{3}}{2}te^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$$

$$=\left[1-2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}te^{-\frac{t}{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}Sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.e^{-\frac{t}{2}}+2Cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.e^{-\frac{t}{2}}+2\sqrt{3}Sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.e^{-\frac{t}{2}}\right]U(t)$$

$$Z(t)=\left[1+\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)Sin\frac{\sqrt{3}}{2}+e^{-\frac{t}{2}}\right]u(t)$$

8 . احسب تحويل لابلاس العكسي لـ:

$$F(s)=\frac{4s+12}{s^2+8s+16}=\frac{4(s+3)}{(s+4)^2}$$

$$= \frac{A_0}{(s+4)^2} + \frac{A_1}{s+4}$$

$$A_0 = \lim_{s \to -4} (s+4)^2 \, F(s) = \frac{4(-4+3)}{1} = 4$$

$$A_1 = \lim_{s \to 4} \left[(s+4)^2 \, F(s) \right]' = 4$$

$$F(s) = \frac{4}{s+4} - \frac{4}{(s+4)^2}$$

$$F(t) = La^{-1}\left[\frac{4}{s+4}\right] - 4La^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^2}\right]$$

$$= \left(4\, e^{-4t} - 4t.e^{-4t}\right) u(t)$$

9 . حل جملة المعادلتين التاليتين:

$$Z`(t) = 2.Z(t) - 3X(t)$$

$$X`(t) = X(t) - 2Z(t)$$

الحل:

$$La[Z`(t)] = 2La[Z(t)] - 3La[X(t)]$$

$$La[X`] = La[X(t) - 2La[Z(t)]$$

$$S\, Z(s) - Z(0) - 2\, Z(s) + 3\, X(s) = 0$$

$$(s-2)\, Z(s) + 3X(s) = 8$$

كذلك:

$$S\,X(s) - X(0) = X(s) - 2Z(s)$$

$$(s-1)\,X(s) + 2Z(s) = 3$$

نحل المعادلتين الجبريتين بـ $X(s), Z(s)$ فنجد:

$$Z(s) = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)}$$

$$X(s) = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s-4)(s+1)}$$

$$X(s) = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+1} \qquad A = -2 \qquad B = 5$$

$$X(t) = (-2e^{4t} + 5e^{-t})\,u(t)$$

$$Z(s) = \frac{C}{s-4} + \frac{D}{s+1} \qquad C = 3 \qquad D = 5$$

$$Z(t) = (3e^{4t} + 5e^{-t})\,U(t)$$

10 . حل المعادلة التكاملية التالية:

$$Z(t) - 2\int_0^t e^{-(t-v)} Sinv dv = t$$

$$La[Z(t)] - 2\,\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2}$$

$$Z(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{1}{s^2}$$

$$Z(t) = 2\int_0^t e^{-u}\ Sin(t-u)\ du + t$$

= 2I + t

$$I = \int_0^t e^{-u} Sin(t-u) du$$

وبحساب التكامل I بالتجزئة مرتين نجد:

$$I = \frac{e^{-t} - (S\text{int} + Cost)}{2}$$

$$Z(t) = \left[t + \frac{e^{-t} - (S\text{int} + Cost)}{2} \right] u(t)$$

مسائل غير محلولة (2 – 3 – 17) ***Supplementary Problems***

1– أوجد تحويل لابلاس لكل من التوابع التالية

$$F_1\ (t) = \begin{cases} t & 0 < t < 3 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$F_2\ (t) = (t + \cos t + \sin t)u(t)$$

$$F_3\ (t) = (ch5t + sh5t)u(t)$$

$$F_3\ (t) = \begin{cases} \cos\left(t - \overline{\frac{2m}{3}}\right) & t > \overline{\frac{2m}{3}} \\ 0 & t < \overline{\frac{2m}{3}} \end{cases}$$

$$F_4(t) = t \sin t\ \ u(t)$$

$$F_4(t) = t^2 \cos , t\ \ u(t)$$

$$F_5\ (t) = \frac{\sin\ t}{\in}\ u(t)$$

$$F_6(t) = \begin{cases} \sin t & o < t < \pi \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

2– أوجد تحويل لابلاس التوابع الدورية الآتية

$$F_1(t) = \ \mathrm{t}^2 \qquad 0 < t < 1$$

$$F_2\ (\mathrm{t}) = \cos \mathrm{t} \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi$$

$$F_3\ (t) = \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ \sin t & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

3– أوجد قيمة التكاملات التالية مستخدماً تحويل لابلاس

$$I_1 = \int_0^\infty e^{4t} \sin t \; dt$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \; dt$$

$$I_3 = \int_0^\infty e^{-2t} \; t \sin t \; dt$$

4- برهن أن

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-2t}}{t} \; dt = \ell n 2$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} \; dt = \ell n \frac{3}{2}$$

5- أوجد لابلاس التوابع التالية: $t > 0$

$$F_1(t) = \frac{e^{-2t} \sin^2 3t}{t}$$

$$F_2(t) = e^{3(t-5)} \sin(t-5)$$

$$F_3(t) = \frac{1 - e^{-4t}}{t e^t}$$

6- أوجد مقلوب تحويل لابلاس للتوابع التالية:

$F_1\ (S$

$F_3\ ($

7- بوساطة تحويل لابلاس أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $Z''(t) + 2Z'(t) + Z(t) = 3$

$Z(0) = Z'(0) = 0$

2) $Z' + Z = t$ $\quad Z(0) = 0$, $Z'(0) = 2$

3) $Z'' - 5Z' + 6Z = 2e^t \quad Z(0) = Z'(0) = 1$

8- أوجد حلول المعادلات التكاملية الآتية :

$$1) Z(t) - \int_0^t e^{t-u} Z(u) du = \cos 2\, t$$

$$2)\ Z(t) - \int_0^t \sin(t-u) du = t^2$$



الباب الثالث

بعض المعادلات التفاضلية الجزئية

(المعادلات الفيزيائية الرياضية)

Some Partial Differential Equations



الفصل الأول

المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية وبعض طرق حلها

Partial differential equations of Second order & some solving Methods

تمهيد:

إن موضوعات هذا الفصل ترتبط ارتباطاً وثيقاً بدراسة مختلف العمليات الفيزيائية التي تدرس مواضيع الهيدروديناميكية ونظرية المرونة والهندسة الكهربائية والميكانيكية وغيرها من المسائل التي تشترك بالجوهر وتختلف في نطاق التطبيق.

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية (الرياضية الفيزيائية) وحلها طرقاً رياضية لحل المسائل الفيزيائية والهندسية الميكانيكية منها الكهربائية.

سوف نصنف المعادلات التفاضلية الجزئية بعد تعريفها ونضرب أمثلة خاصة على أنواع شهيرة منها ندرس بعضها بالتفصيل والبعض الآخر بإيجاز.

(3 . 1 . 1): تعريف:

أ . المعادلات التفاضلية بمتغيرين مستقلين: إن المعادلة التفاضلية الجزئية بمتغيرين مستقلين هي علاقة تربط بين دالة (تابع) لمتحولين $U(x,y)$ ومشتقاتها الجزئية من المرتبة الثانية أي علاقة من الشكل؛

$$F(U(x,y), U_x, U_y, U_x^2 , U_{xy} , U_y^2) = 0$$

حيث $U_y^2, U_{xy} , U_x^2, U_y , U_x$ المشتقات الجزئية للدالة $U(x,y)$ من المرتبة الأولى والثانية على الترتيب.

يمكن تعميم هذا التعريف على توابع بأكثر من متحولين مستقلين.

إذا كان شكل المعادلة هو التالي:

$$A_{11}\, U_x^{2} + 2\, A_{12}\, U_{xy} + A_{22}\, U_y^{2} + F_1\,(x,y,U\,,U_x\,,U_y) = 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

حيث المعاملات تابعة لـy, x. نسمي (3-1-1) معادلة خطية بالنسبة للمشتقات، أما إذا اعتمدت المعاملات على كل من $y\,,x$ وعلى المشتقات الجزئية دعيت المعادلة معادلة شبه خطية.

نسمي (3-1-1) معادلة خطية بشكل عام إذا كانت خطية بالنسبة للمشتقات من الرتب العليا وبالنسبة للتابع U ومشتقاته الأولى مثل:

$$A_{11}\, Ux^{2} + 2\, A_{i2}\, Uxy + A_{22}\, Uy^{2} + b_1\, U_x + b_2\, U_y + Cu + f = 0 \qquad (3\,–1\text{-}2)$$

حيث المعاملات جميعها توابع لـ$y\,,x$ فقط.

وعندما تكون المعاملات في (3 –1-2) غير متعلقة بـ$y\,,x$ تسمى المعادلة خطية بأمثال ثابتة، وإذا انعدم f سميت معادلة متجانسة.

إن جوهر الحل هو إمكانية تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية جزئية بسيطة وفق تحويل ما (له تحويل عكسي) غير شاذ.

لن ندخل كثيراً في هذا المنحى وسوف نعتبر أن هذا التحويل معروف لدينا.

(3 . 1 . 2): المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية ذات النمط الزائدي:

يصادفنا هذا النمط من المعادلات عند دراسة الكثير من المسائل الفيزيائية المتعلقة بالاهتزازات، وأبسط أشكال هذا النمط هو:

$$Ux^{2} – Uy^{2} = 0$$

أو $Ux^2 = Uy^2$

وسندرس أن هذا الشكل يمثل اهتزاز خيط مرن في مستو شاقولي.

(3 . 1 . 3): صياغة المسائل الحدية:

أ . معادلة اهتزاز خيط مرن في مستو شاقولي:

لندرس هذه المسألة في المستوي $x,\ U(x,t)$ حيث يمثل x محور الفواصل الذي ينطبق عليه الخيط و$U(x,t)$ محور التراتيب الذي يتم وفقه **ووفقه فقط** الاهتزاز (الحركة مستوية شاقولية).

سوف نفترض ما يلي:

1 . الخيط متجانس له كتلة واحدة في واحدة الطول.

2 . قابل للانثناء.

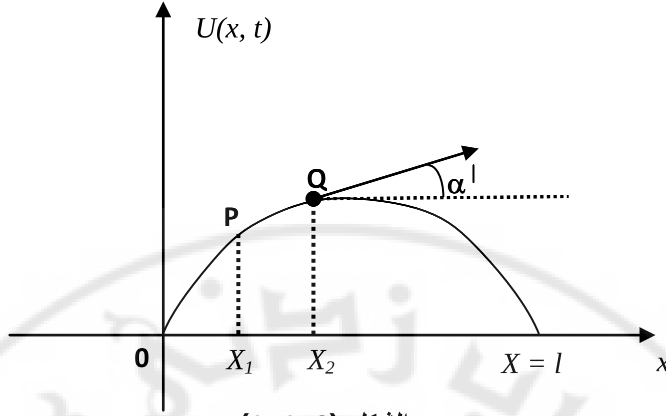
3 . الحركة تتم في المستوي (x, u) وشاقولية فقط.

4 . يمكن وصف هذه الحركة بالدالة $U(x,t)$ حيث t هو الزمن وx الفاصلة.

ملحوظة:

نقول إن الخيط قابل للانثناء إذا كانت قوى الشد الناتجة عن الاهتزاز بالخيط ذات محصلة مماسية فقط وهذا يعني أن الوتر (الخيط) لا يقاوم الانثناء.

يمكن أن نحسب قوى الشد الناتجة عن الاهتزاز (الاهتزازات صغيرة) وفق قانون هوك الذي نهمل عند استخدامه مربع السرعة $\left(U_x^2\right)$ بالمقارنة مع الواحد الصحيح.



الشكل (3 -1 -1)

l طول الوتر

اعتماداً على ما سبق لنحسب الاستطالة التي تحدث بالوتر (جزء الوتر PQ)

إن طول القوس في جزء المسقط x_1x_2 يعطى بالعلاقة:

$$S` = \int_{X1}^{X2} \sqrt[2]{1+U_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = \Delta s$$

أي بشكل آخر يمكن أن نعد $\overline{\Delta S} = \overline{PQ} = x_2 - x_1$ وفق هذا الاصطلاح لا تحدث استطالة لجزء الوتر المهتز أثناء عملية الاهتزاز.

وحسب قانون هوك ينتج أن مقدار الشد في كل نقطة غير متعلق بالزمن وهو لا يعتمد على الفاصلة x أي:

$$T(x) = T_0 = cons\ t$$

لنرمز بـTx, Tu لمسقطين قوى الشد على محور السينات ومحور التراتيب أي:

$$Tx(x) = T(x)Cosx \approx \frac{T(x)}{\sqrt{1+U_x^2}} \approx T(x)$$

$$Tu(x) = T(x)Sin\alpha \approx T(x)tg\alpha \approx T(x)Ux$$

حيث α زاوية صغيرة وهي زاوية المماس مع محور الفواصل للمنحني $U(x,t)$.

لندرس القوى المؤثرة على الجزء $\overline{\Delta} \approx x_1x_2$ حيث تؤثر على هذا الجزء قوى الشد وقوى خارجية وقوى القصور الذاتي، وبما أنه لا يوجد حركة أفقية لهذا فإن محصلة مساقط هذه القوى الأفقية معدومة وحسب افتراضنا فإن الحركة شاقولية على امتداد المحور $U(x,t)$ ولهذا يكون:

$T(x_1) = T(x_2)$ أو $Tx(x_2) - Tx(x_1) = 0$

أي $T(x) = T_0$

وحسب القانون الثاني لنيوتن القائل إن محصلة القوى المؤثرة تساوي إلى جداء الكتلة المتحركة بالتسارع، فيمكننا استنتاج معادلة اهتزاز الوتر.

إن مركبة كمية الحركة جزء الوتر $\overline{\Delta S}$ على المحور U تساوي:

$$\int_{x1}^{x2} U_t(\xi,t)\rho(\xi)d\xi \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

حيث ρ الكثافة الخطية للوتر.

إن التغير في كمية الحركة خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ أي:

$$\int_{X1}^{x2x} \rho(\xi)[U_t(\xi,t_2) - U(\xi,t_1)]d\xi \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

يساوي دفع قوى الشد أي:

$$T_0\, Ux\Big|_{x=x2} - T_0\, Ux\Big|_{x=x1}$$

لهذا فإن:

$$\int_{x1}^{x2} \left[U_t(\xi,t_2) - U_t(\xi,t_1)\right]\rho(\xi)d(\xi) =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0\left[Ux(x_2\ \tau`)-Ux(x,\tau)\right]d\tau+\int_{x1}^{x2}\int_{t1}^{t2}F(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3\text{-}1\text{-}3)$$

حيث $F(\xi.\tau)$ تابع كثافة القوى الخارجية الخطية (المفترض أن هذا التابع مستمر مع τ على طول الخيط l) وللانتقال إلى المعادلة التفاضلية (مفترضين استمرار المشتقات الثانية للدالة $U(x,t)Z$ تأخذ العلاقة الأخيرة بعد تطبيق نظرية القيمة الوسطى مرتين الصورة الآتية:

$$U_{tt}\left(\xi^{**},t^{**}\right)\rho\left(\xi^{**}\right)\Delta t\Delta x=$$

$$\left\{T_0\left[U_{xx}(\xi^{**},t^{**})+F(\xi^{***},t^{***}\right]\right\}\Delta t\Delta x \qquad (3\text{-}1\text{-}4)$$

حيث:

$$\xi^{*},\xi^{**},\xi^{***}\in(x_1,x_2)$$

$$t^{*},t^{**},t^{***}\in(t_1,t_2)$$

وبعد الاختصار وأخذ النهايات نحصل على:

$$T_0U_{xx}=\rho\, U_{tt}-F(x,t)$$

وعندما تكون ρ ثابتة نكتب:

$$U_{tt}=a^2\,U_{xx}+f(x,t)$$

حيث

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

$$f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t)$$

حيث f كثافة القوة منسوبة لوحدة الكتل.

وعند انعدام القوى الخارجية نحصل على المعادلة:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad \text{..........................} \quad (3\text{-}1\text{-}5)$$

أو على المعادلة:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0$$

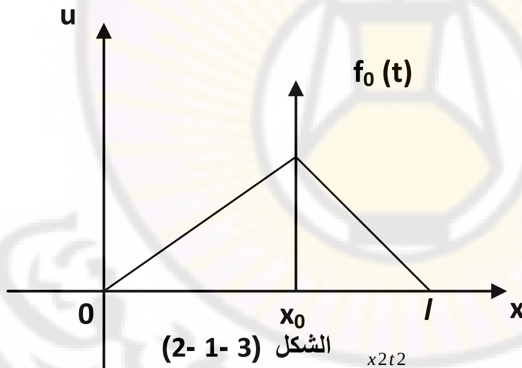
وهي معادلة اهتزاز وتر لا يتعرض لقوى خارجية وهي من النمط الزائدي.

ملحوظة:

في كل ما سبق افترضنا أن الدوال المستخدمة تقبل الاشتقاق مرتين ولكن هذا لا يعني عدم وجود دوال لا تقبل الاشتقاق مرتين وتحقق هذه المعادلات.

إذا أثرت في النقطة x_0 حيث : $x_1 < x_0 < x_2$ قوة مركزية $f_0(t)$ كما في الشكل:

فإن المعادلة (3-1-3) تكتب على الصورة:



الشكل (3 -1 -2)

$$\int_{X1}^{x2} \rho(\xi)[U_t(\xi.,t_2) - U_t(\xi,t_1)]d\xi - \int_{X1}^{x2}\int_{t1}^{t2} f(\xi\ ,t)d\xi d\tau =$$

$$\int_{t1}^{t2} T_0[U_x(x_2,\tau) - U_x(x,\tau)]d\tau + \int_{t1}^{t2} f_0(\tau)d\xi\tau$$

وحيث إن سرعات نقط الوتر محدودة فإن التكاملين في الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة يؤولان إلى الصفر عندما:

$$x_2 \to x_0$$

$x_1 \to x_0$

لهذا نجد:

$$\int_{t1}^{t2} T_0 \left[Ux(x_0+0,\tau) - U_x(x_0-0,\tau) \right] d\tau$$

$$= -\int_{t1}^{t2} f_0(\tau) d\tau$$

وحسب نظرية القيمة الوسطى والاختصار على Δt (الاختياري) والانتقال إلى النهايات:

$$Ux(x,t) \quad \Big|_{X_0-0}^{X_0+0} = -\frac{1}{T_0} f_0(t)$$

أي أن المشتقات الأولى تنقطع في نقطة تأثير القوة المركزية ولا يكون للمعادلة التفاضلية معنى، أي:

$$Ux(x_0+0,t) - Ux(x_0-0,t) = -\frac{1}{T_0} f_0(t) \text{، } U(x_0+0,t) = U(x_0-0,t)$$

وهذا يعبر عن مقدار كسر الوتر في x_0 وهو يعتمد على قوى الشد T_0 والقوة المركزية $f_0(t)$.

ب . معادلة الاهتزاز الطولية للقضبان والأوتار:

إن المعادلات الواصفة للاهتزازات الطولية للأوتار والقضبان والنوابض لها صورة واحدة؛ ولهذا سوف ندرس اهتزاز قضيب طوله l $(0 < x < l)$ منطبق على محور الفواصل ox ويمكن وصف اهتزازه بالدالة $U(x,t)$ في اللحظة t، وفي النقطة ذات الفاصلة x عندما نحصل على إزاحة في هذه النقطة فتحصل حالة اهتزاز طولي على طول القضيب حسب قانون هوك ومتغيرات لاغرانج تصبح الفاصلة x (التي كانت النقطة المقابلة لها في وضع اتزان) تساوي $x + U(x,t)$.

لنحسب الاستطالة النسبية لعنصر القضيب ذي الطول Δx حيث بدايته هي U ,
$(x, + U(x,t))$ ونهايته $(x+ \Delta x+ U(x+\Delta x, t)$.

إن مقدار هذه الاستطالة يساوي:

$$\frac{[\Delta x + U(x+\Delta x, t] - [\Delta x + U(x,t)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta U(x,t)}{\Delta x} = U_x(x+\theta \Delta x, t) \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

وعندما $\Delta x \to 0$ نجد أن هذه الاستطالة النسبية تتحدد فقط بـ$Ux(x,t)$.

حيث $k(x)$ عامل المرونة (عامل يونغ) وبتطبيق نظرية تغير كمية الحركة نجد:

$$\int_{x1}^{x2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)]\, \rho(\xi) d\xi =$$

$$\int_{t_1}^{t2} k(x_2) Ux(x_2, \tau) - k(x_1) U_x(x_1, \tau)] d\tau +$$

$$+ \int_{x1}^{x2}\int_{t1}^{t2} F(\xi, \tau) d\varepsilon d\tau$$

حيث $F(x,t)$ دالة كثافة القوة الخارجية في واحدة الطول.

وعند الانتقال إلى النهايات أي:

$$\Delta x \to 0 \quad , \quad \Delta t \to 0$$

وتطبيق نظرية القيمة الوسطى نجد:

$$[K(x)Ux]_x = \rho U_{tt} - F(x,t)$$

وعندما يكون القضيب متجانساً أي $\rho(x), \quad k(x)$ ثوابت نجد:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + \frac{F(x,t)}{\rho}$$

حيث $a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$

ج . معادلة اهتزاز خيط دون وجود قوى خارجية:

تصف هذه المعادلة حركة اهتزاز خيط مرن مثبت الطرفين طوله l يهتز في مستو شاقولي ويزاح عن وضع توازنه في لحظة البدء $(t = 0)$ ويترك بعدها حراً سوف نفترض تحقيق الشروط الآتية:

1 . الخيط متجانس له كتلة واحدة في واحدة الطول.

2 . ثقل الخيط مهمل.

3 . الاهتزاز شاقولي فقط.

لنبحث عن القوى المؤثرة على حركة الخيط (على طول Δl من الخيط حيث $\overline{M_1M_2} = \Delta l$)
ولكن $T_2, \; T_1$ قوى الشد عند $M_2, \; M_1$ على الترتيب وبما أن حركة الخيط شاقولية فقط إذاً مسقطا قوى الشد على المحور ox متعاكسان مباشرة أي:

$$T_1 \, Cos \, \alpha \; , T_2 \, cos \, \beta$$

يحققان:

$$T_1 \cos \alpha = + T_2 \cos \beta = T$$

(متساويان بالققيمة المطلقة)، أما المسقطان الشاقوليان فهما:

$$T_1 \, Sin \, \alpha \quad , T_2 \, Sin \, \beta$$

فلهما محصلة وهي:

$$T_2 \, Sin\,\beta \;\; - T_1 \, Sin \,\alpha$$

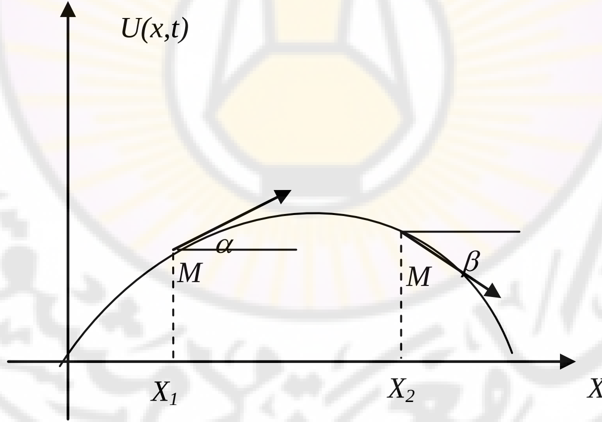
ومحصلة القوى المؤثرة على Δl هي المحصلة السابقة وحسب قانون نيوتن بالتحريك فإن القوى تمثل بـ $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$

حيث $\vec{\Gamma}$ التسارع و $\vec{F}$ القوى، وبالإسقاط:

$$T_2 Sin\beta - T_1 Sin\alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

حيث ρ كتلة واحدة الطول و $U(x,t)$ تابع الاهتزاز، نقسم على T.

$$\frac{T_2 Sin\beta}{T_2 Cos\beta} - \frac{T_1 Sin\alpha}{T_1 Cos\alpha} = \frac{\rho}{T} \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$



الشكل (3- 1- 3)

أي:

$$\overline{M_1 M_2} = \Delta l \approx \Delta x$$

$$tg\beta - tg\alpha = \rho \frac{\Delta x}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

ومن معادلة الخيط

$$tg\alpha = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$$

$$tg\beta = \frac{\partial U(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

ومنه

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial U(x+\Delta x,y)-\partial U(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

وبأخذ النهايات $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

أي $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

حيث $a^2 = \frac{T}{\rho}$ وهي المعادلة المطلوبة.

ء . معادلة الاهتزازات الكهربائية في النواقل:

لنعد التيار والكمون في موضع x ولحظة t وسطاء التيار في ناقل كهربائي ولنرمز لهما بـV, I على الترتيب.

لنطبق قانون أوم على جزء من ناقل طوله dx يمكننا كتابة ما يلي:

$$-V_x\, dx = Irdx + IL\, dx \qquad (3\text{-}1\text{-}6)$$

حيث L , R هما المقاومة والتحريض الذاتي في الناقل في واحدة الأطوال.

وأما كمية الكهرباء المارة بالعنصر dx خلال dt فهي:

$$[I(x,t) - I(x+\Delta x, t)]\, dt = -I_x\, dx\, dt \qquad (3-1-7)$$

وهي تساوي مجموع كمية الكهرباء اللازمة لشحن العنصر dx وأما الكمية المفقودة نتيجة عدم العزل التام فهي:

$$C[V(x,t+\Delta t) - V(x,t)]\, dx + G\, dxVdt = [CV_t + GV]\, dx\, dt \qquad (3-1-8)$$

حيث G, C معاملات السعة والتسرب الكهربائي في واحدة الأطوال علماً بأن: الكمية المفقودة متناسبة مع الكمون.

من المعادلات الثلاث الأخيرة نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} Ix + CV_t + GV &= 0 \\ V_x + LI_t + RI &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3-1-9)$$

والمعادلات الأخيرة تدعى معادلة البرق ومنها يمكننا الحصول على معادلة واحدة تحدد الدالة I. لنفاضل المعادلة الأولى من $(3-1-9)$ بالنسبة لـx والثانية بالنسبة لـt بعد ضربها بـx وبالطرح ينتج:

$$I_{xx} + GV_x - CL\, I_{tt} - CRI_t = 0$$

(مع ثبات المعاملات)

نعوض في المعادلة الثانية من $(3-1-9)$ عن V_x فنحصل على:

$$I_{xx} = C\, L\, I_{tt} + (CR + GL)\, I$$

وبصورة مماثلة نحصل على معادلة الكمون:

$$V_{xx} = C\,L\,V_{tt} + (CR + GL)\,V_t + GRV$$

وهما معادلتا البرق للتيار I والكمون V وعند إهمال G, R بتوصيل إلى

$$V_{tt} = a^2 V_{xx} \qquad a = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

(3-1-4): الشروط الحدية والشروط الابتدائية:

كما نعلم لأجل وصف رياضي لعملية فيزيائية يلزم وضع شروط كافية لتحديد حل وحيد للمسألة المطروحة، وحسب معرفتنا فإن للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية حلولاً لا نهائية من حيث العدد؛ ولهذا يلزم وضع شروط إضافية لأجل وحدانية الحل، وفي المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الثانية يمكننا إيجاد الحل بشكل وحيد إذا علمنا قيمة الدالة ومشتقها في لحظة البدء $(t = 0)$، وتسمى مثل هذه المسائل بمسألة كوشي، ويمكننا أن نصادف شروطاً أخرى، فمثلاً في مسألة السليسلة تعطى قيمة الدالة الحل في نقطتين، ويمكن أن يكون للمعادلة التفاضلية الجزئية شروط إضافية مختلفةعن الصورة التي ذكرت سابقا.

لندرس مسألة بسيطة وهي مسألة اهتزاز وتر مثبت الطرفين.

لتكن $U(x,t)$ الدالة المعبرة عن الاهتزاز في وتر منطبق على المحور ox طول $(0 \le x \le l)$ مثبت الطرفين أي:

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \;........... \qquad ...\;(3\text{-}1\text{-}10)$$

وحيث إن عملية الاهتزاز تعتمد على صورة الوتر الابتدائية (شكله في لحظة البدء) وتوزيع السرع من تلك اللحظة $(t = 0)$ لهذا يلزم معرفة:

$$\left.\begin{aligned} U(x,t_0) &= \varphi(x) \\ U_t(x,t_0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} ....(3-1-11)$$

حيث $\varphi(x)$, $\psi(x)$ دالتان معروفتان.

إن الشروط المذكورة بالعلاقتين (3-1-10) ، (3-1-11) تحددان تماماً حل معادلة الاهتزاز ذات الشكل:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \,................\, (3\text{-}1\text{-}12)$$

أما إذا كان طرفا الوتر يتحركان وفق قانونا حركة ما فإن الشروط الحدية تأخذ الشكل:

$$\left.\begin{aligned} U(0,t) &= \mu_1(t) \\ U(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} ....(3-1-13)$$

حيث $\mu_2(t), \mu_1(t)$ دالتان معلومتان وتصاغ شروط ابتدائية وحدية بشكل مشابه لمسائل أخرى.

☜ **ملحوظة:**

إذا كان ما يهمنا هو دراسة الظاهرة خلال فترة زمنية صغيرة (بفرض أن تأثير الحدود غير جوهري) فإنه بدلاً من دراسة المسألة الكاملة ندرس المسألة اللانهائية بالشروط الابتدائية لمنطقة اللانهاية.

فإذا كان المطلوب حل المعادلة:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x,t) \,..................\, (3\text{-}1\text{-}14)$$

حيث $-\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$

فإن الشروط الابتدائية تصبح:

$$\left.\begin{aligned} U(x,0) &= \varphi(x) \\ U_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad -\infty < x < \infty ....(3-1-15)$$

وتدعى المسألة عندها مسألة كوشي.

وإذا كنا ندرس المسألة قرب أحد الحدود بحيث لا يكون هناك تأثير للنظام الحدي على الحدود الأخرى خلال فترة زمنية (الفترة التي تهمنا) فإننا نصل إلى صياغة مسألة وتر منطبق على المحور ox مثبت أحد الطرفين والطرف الآخر يمتد إلى ∞ أي أن الشروط الابتدائية تصبح:

$$U(x, t) = \varphi(x) \qquad t \geq 0$$

$$U_t(x,0) = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq \infty$$

وعند ذلك يتحدد طابع الظاهرة باللحظات الزمنية البعيدة [بشكل كاف عن لحظة البدء $t = 0$] تحديداً تاماً بالشروط الحدية لأن تأثير الشروط الابتدائية يضعف مع مرور الزمن بفضل الاحتكاك.

وتصادفنا مثل هذه المسائل بكثرة خاصة عندما تهتز المجموعة بنظام حدي دوري يؤثر على وتر زمناً طويلاً، وتصاغ مثل هذه المسائل (بدون شروط ابتدائية) كما يلي:

ليكن المطلوب تعيين حل للمعادلة المدروسة (*3-1-14*) وفق الشروط الحدية:

$$U(0, t) = \mu_1(t) , U(l, t) = \mu_2(t)$$

حيث

$$0 \leq x \leq l \quad ; \quad t > 0$$

بنفس الطريقة تصاغ المسألة بدون شروط ابتدائية لمستقيم نصف محدود.

(*3*−1−*5*): المسألة العامة بشكل مختصر:

من الطبيعي أن يفكر الإنسان بأنه من أجل حل مسألة معقدة عليه أن يحاول تغير هذا الحل إلى حل مسألة أو مسائل أكثر سهولة؛ ولهذا فإننا سوف نعبر عن حل المسألة الحدية العامة في صورة مجموع حلول لعدة مسائل حدية خاصة؛ ولهذا لنفرض أن المعادلة:

$$\frac{\partial^2 Ui}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Ui}{\partial x^2} + f^i(x,t) ....(3-1-16)$$

حيث: $0 \le x < l$, $t > 0,$ $i = 1,2,..............n$

تحقق الشروط الإضافية التالية:

$$Ui(0,t) = \mu_1^i(t), \quad U_i(l,t) = \mu_2^i(t)$$

$$\frac{\partial Ui}{\partial t}(x,0) = \psi^i(x) \quad ; \quad Ui(x,0) = \varphi^i(x)$$

من الواضح أن الدالة:

$$U^0(x,t) = \sum_{i=1}^{n} Ui(x,t) + f^0(x,t) \qquad f^0{}_{(x,t)=\Sigma fi(x,t)}$$

$i=1,2,3$ ...$n.$

تحقق المعادلة (*3-1-16*) بافتراض تحقق الشروط الإضافية التي أطرافها اليمنى هي الدوال:

$$\mu_k^{(0)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i(t) \qquad k = 1,2$$

$$\varphi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(x)$$

$$\psi^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi^i(x)$$

أي أن حل المسألة الحدية العامة:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t) \qquad 0 , x < l \quad ; t > 0$$

والشروط

$$U(0,t) = \mu_1(t)$$

$$U(l , t) = \mu_2(t)$$

$$U(x, 0) = \varphi (x)$$

$$U_t(x, 0) = \psi (x)$$

يمكن أن يعبر عنه في صورة المجموع.

$$U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t) + U_3(x, t) + U_4(x, t)$$

حيث U_1, U_2, U_3, U_4 حلول المسائل الحدية التالية:

$$\frac{\partial^2 Ui}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Ui}{\partial x^2} \qquad i = 1,2,3$$

$$\frac{\partial^2 U_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + f(x,t)$$

وفق الشروط:

$$U_1(0 , t) = 0 , U_1(l , t) = 0 , U_1(x,0) = \varphi (x)$$

$$\frac{\partial U_1(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$$

$$U_2(0 , t) = \mu_1 (t) , U_2(l, t) = 0 , U_2(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}(x,0) = 0$$

$U_3(0 , t) = 0 , U_3(l , t) = 0 , U_3(x,0) = \varphi (x)$

$$\frac{\partial U_3}{\partial t}(x,0) = 0$$

$U_4(0 , t) = 0 , U_4(l , t) = 0 , U_4(x,0) = \varphi (x)$

$$\frac{\partial U_4}{\partial t}(x,0) = 0$$

☜ **ملحوظة:**

يمكن تعميم ذلك على دالة بأكثر من متحولين:

(3−1−6) طريقة الأمواج المنتشرة (علاقة دلامبير):

سوف نبدأ بدراسة طرق تشكيل حلول المسائل الحدية لمعادلات النمط الزائدي لوتر لانهائي وذي الشروط الابتدائية التالية:

$$\left.\begin{aligned} &U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \\ &U(x,0) = \varphi(x) \\ &U_t(x,0) = \psi(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-1-17)$$

لنحول المعادلة (3-1-17) (الأولى) إلى الشكل القياسي وفق المعادلة المميزة فنجد:

$dx^2 - a^2\, dt = 0$

$(dx-adt)(dx+adt)=0$

أي:

$dx - a\, dt = 0 \qquad ; \qquad dx + adt = 0$

أي:

$$\frac{dx}{dt} = a \qquad x = at + c_1$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \qquad x = -at + c_2$$

فإذا افترضنا متحولين جديدين

$$\varepsilon = x + at \qquad \eta = x - at$$

تتحول المعادلة (3-1-17) إلى الشكل:

$$U_{\varepsilon\eta} = 0$$

لنكامل بالنسبة لـε فنجد:

$$U_{\eta} = f(\eta)$$

نكامل بالنسبة لـη فنجد:

$$U(\varepsilon,\eta) = \int f(\eta)d\eta + f_1(\varepsilon)$$

$$U(\varepsilon,\eta) = f_2(\eta) + f_1(\varepsilon) \ldots\ldots\ldots.(3-1-18)$$

حيث f_2, f_1 توابع لـε, η على الترتيب.

وكل منهما يقبل التفاضل مرتين وبالعكس إذا تحقق الشرط فإن $U(\varepsilon, \eta)$ المحددة بالعلامة (3-1-18) تكون حلاً للمعادلة $U_{\varepsilon\eta} = 0$.

إذا عدنا إلى المتحولات القديمة:

$$U(x,t)=f_1\,(x+at) + f_2(x-at) \ldots\ldots \qquad .(3\text{-}1\text{-}19)$$

وهذه الدالة حل للمعادلة $U_{tt} - a^2\, U_{xx} = 0$

لنعين f_1, f_2 بدلالة $\varphi(x)$, $\psi(x)$ نجد حسب الشروط:

$$U(x,0) = f_1\,(x + f_2(x) = \varphi\,(x) \ldots\ldots\ldots \qquad (3\text{-}1\text{-}20)$$

$$U_t(x,0) = a\,f`_1\,(x) - a\,f`_2(x) = \psi\,(x) \ \ldots\ldots\ldots \qquad .\,(3\text{-}1\text{-}21)$$

وحسب تكامل العلاقة (3-1-20) نجد:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x0}^{x}\psi(x)dx + c$$

حيث x_0, c ثوابت

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi\,(x)$$

$$f_1\,(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)dx + c$$

فنجد:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)dx + \frac{\overline{c}}{2} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{2}{2a}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)dx + \frac{c}{2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-1-22)$$

وبذلك نكون قد حددنا الدالتين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بدلالة الدالتين φ, ψ علماً بأن (3-1-22) يجب أن تحقق أي قيمة لمتحول مستقل؛ لهذا نعوض في عبارة $U(x,t)$ عن f_2, f_1 فنجد:

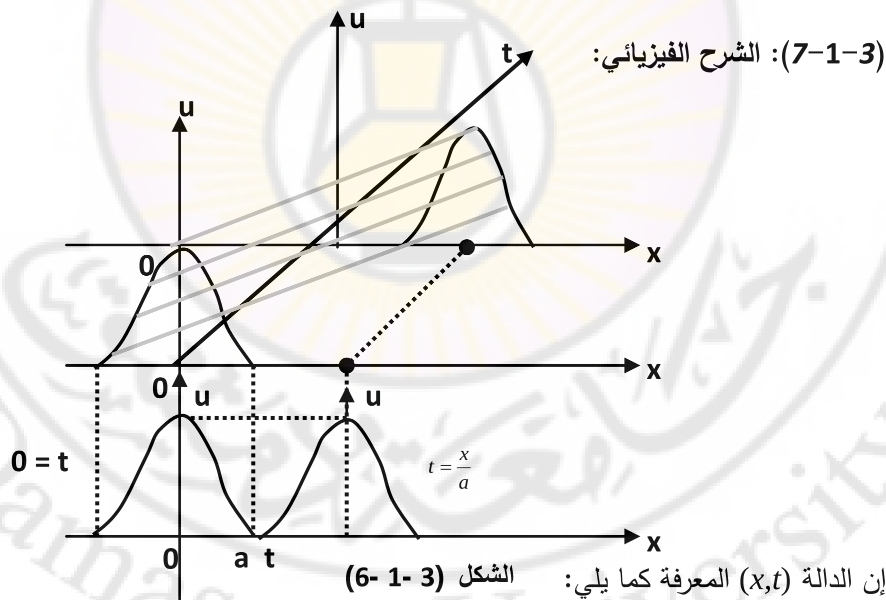
$$U(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{x0}^{x+at}\psi(\alpha)d(\alpha)-\int_{x0}^{x-at}\psi(\alpha)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+a)+\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha\right]\text{.........}(3-1-23)$$

وهي علاقة دلامبير.

ملحوظة: حصلنا على ما سبق بافتراض وجود حل للمعادلة (المسألة المطروحة) وهذا يثبت وحدانية الحل.

(3−1−7): الشرح الفيزيائي:



الشكل (3 -1 -6)

إن الدالة (x,t) المعرفة كما يلي:

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha\right]$$

وهي علاقة تعبر عن عملية انتشار موجه الانزياح الابتدائي والسرعة الابتدائية ، وعندما تكون لحظة البدء $t = t_0$ فإن $U(x, t_0)$ تعطي المقطع الجانبي للوتر في تلك اللحظة ، وعند تثبت $x = x_0$ نحصل على الدالة $U(x,t)$ التي تعبر عن الحركة في النقطة x_0 كما في الشكل السابق.

نلاحظ أن تراكب الموجتين:

$f_1(x+at) + f_2(x-at)$

وهو يمثل حل معادلة كوشي للوتر اللانهائي، فإحدى هاتين الموجتين تتجه يميناً (f_2) والأخرى يساراً (f_1)، وبهذا نحصل:

$$f_1(x+at) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right]$$

$$f_2(x-at) = \frac{1}{2}\left[\psi(x+at) + \psi(x-at)\right]$$

حيث

$$\psi(x) = \frac{1}{2\alpha}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha$$

<u>يمكننا دراسة الحالات الخاصة التالية:</u>

1 . السرعة الابتدائية معدومة والانزياح الابتدائي معلوم $\varphi(x)$ عندها يكون الحل:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right]$$

2 . الانزياح الابتدائي معدوم والسرعة الابتدائية معلومة عندها:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\psi(x+at) + \psi(x-at)\right]$$

3 . السرعة الابتدائية غير معدومة وكذلك الانزياح الابتدائي عندها يكون الحل:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at) + \frac{1}{a}\left[\psi(x+at) - \psi(x-at)\right]\right]$$

(3–1–8): طريقة فصل المتحولات (طريقة فورييه):

إن طريقة فصل المتحولات أو طريقة فورييه من أكثر الطرق شيوعاً في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، وسوف نشرحها من أجل دراسة اهتزاز خيط مثبت الطرفين.

ليكن المطلوب حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}$$

والمحقق للشروط الحدية

$U(0،t) = 0$ $U(l,t) = 0$ والابتدائية $U_t(x,o) = \psi(x)$ $U(x,0) = \varphi(x)$

بفرض

$$U(x,t) = X(x) . T(t)$$

وحيث إننا افترضنا أن كلاً من الدالتين T , X تتبعان متحولاً وحيداً هو t , x على الترتيب، فنعوض في المعادلة المفروضة فنجد:

$$X``T = \frac{1}{a^2} T``X$$

أو

$$\frac{X``}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T``}{T}$$

وبما أن الطرفين كلاً منهما يتبع متحولاً مستقلاً ومتساويان لهذا يكون كل منهما ثابتاً، أي:

$$\frac{X``}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T``}{T} = -\lambda \qquad \lambda > 0$$

(سنرى لاحقاً أنه من أجل $0 \leq \lambda$ نحصل على الحل التافه)

وبذلك نجد:

$X`` + \lambda X = 0$

$T`` + a^2 \lambda T = 0$

وكما نعلم من الشروط الحدية:

$U(0,1) = X(0) . T(t) = 0$

$U(l, t) = X (l) . T(t) = 0$

أي:

$X(0) = X(l) = 0$

لأن $T(t) \neq 0$ (عند الحالة المعاكسة نحصل على الحل التافه).

ونتيجة تعين $X(x)$ نصل لمسألة بسيطة وهي حساب القيم الذاتية، أو بشكل آخر المطلوب تعين الوسيط λ من أجل إيجاد حل غير تافه للمسألة:

$X`` + \lambda X = 0 \qquad , \qquad X(0) = X(l) = 0$

تسمى قيم λ المعينة لهذه الحلول بالقيم الذاتية والدوال المقابلة لها بالدوال الذاتية (مثل هذه المسألة تسمى مسألة شتورم . ليوفيل).

<u>لندرس الحالات المختلفة لقيم λ:</u>

1 . $\lambda < 0$ عندها يكون الحل العام للمعادلة:

$$X`` + \lambda X = 0$$

من الشكل

$$X(x) = C_1\, e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

وحسب الشروط الحدية:

$$X(0) = C_1 + C_0 = 0 \quad ; \; C_1 = - C_2$$

$$X(l) = C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0 \qquad ; \qquad \alpha = l\sqrt{-\lambda}$$

ومنه

$$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

أي أننا حصلنا على الحل التافه.

2 . من أجل $\lambda = 0$ في هذه الحالة يكون حل المعادلة:

$$X`` + \lambda X(x) = 0 \qquad ; \qquad \lambda = 0$$

من الشكل

$$X(x) = C_1\, x + C_2$$

ومن الشروط الحدية:

$X(0) = C_2 = 0 \quad ; \quad X(l) = C_1\, l = 0$

أي $C_1 = 0$ ومنه $X(x) = 0$

3 . من أجل $\lambda > 0$ نجد:

$X`` + \lambda X(x) = 0$

ويكون الحل من الشكل:

$$X(x) = D_1 Cos\sqrt{\lambda}\ x + D_2 Sin\sqrt{\lambda}\ x$$

ومن الشروط الحدية نجد:

$X(0) = D_1 = 0$

$$X(l) = D_2 Sin\ \sqrt{\lambda}\ l = 0$$

ومنه

$$Sin\sqrt{\lambda} l = 0 = Sin n\pi$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$$

أي:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

حيث n عدد صحيح، أي هناك حلول غير تافهة وفق قيم λ_n وهذه القيم يقابلها دوال X_n حيث:

$$X_n = D_n . Sin\frac{n\pi}{l} x$$

حيث D_n ثابت اختياري.

ليكن $D_n = 1$ عند ذلك نحصل على حلول للمعادلة:

$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

من الشكل

$$T_n = A_n Cos\frac{n\pi}{l}at + B_n Sin\frac{2\pi}{l}at$$

والحل العام

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{n} U_n(x,t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[A_n Cos\left(\frac{n\pi}{l}at\right) + B_n Sin\left(\frac{n\pi}{l}at\right)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

وحسب الشروط المفروضة:

$$U(x,0) = La(x) = \sum_{1}^{\infty} Un(x,0)$$

$$U(x,0) = \sum_{1}^{\infty} A_n Sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

أي نشرنا الدالة $\varphi(x)$ وفق سلسلة جيوب؛ لهذا يمكن تعيين الثابت A_n كما يلي:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l}\varphi(x) Sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

من الشرط الثاني نجد:

$$U_t(x,0)=\psi(x)=\sum_1^\infty \frac{\partial Un}{\partial t}(x,0)$$

$$\psi(x)=\sum_1^\infty \frac{\pi n}{l} aB_n Sin\frac{n\pi}{l}x$$

أي أن $\psi(x)$ أيضاً ينشر وفق سلسلة جيوب لهذا يمكن تعيين الثابت كما يلي:

$$\frac{n\pi}{l}aB_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)Sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

أو

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)Sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

أي أننا عينّا كل الثوابت (B_n , A_n) والحل أصبح جاهزاً وفق سلسلة لانهائية.

فإذا كانت السلسلة متقاربة وجد الحل وإلا فلا يوجد حلول، وهذا طبعاً يعتمد على شروط نشر فورييه للدالتين $\psi(x),\varphi(x)$.

☜ **ملحوظة:**

يمكننا مناقشة طريقة حل معادلة تفاضلية جزئية غير متجانسة ومن المرتبة الثانية كما يلي:

لتكن لدينا المعادلة

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f_0 (x)$$

ولتكن الشروط الابتدائية والحدية من الشكل:

$$U(x,0) = \varphi(x) \quad ; \quad U_t(x,o) = \psi(x)$$

$$U(0,t)=U_1=cte$$

$U(l,t) = U_2 = cte$

ويكون الحل في صورة

$$U(x,t) = \overline{U}(x) + v(x,t)$$

حيث $\overline{U}(x)$ يمثل حالة الاستقرار للوتر المعروفة وفق المعادلة (والشروط)التالية:

$$a^2 \overline{U}_{xx}(x) + f_0(x) = 0$$

$$\overline{U}(0) = U_1$$

$$\overline{U}(l) = U_2$$

أما الدالة $v\,(x,t)$ فتمثل حالة الانزياح عن الحالة المستقرة وهي تحقق المعادلة المتجانسة:

$$U_{tt} = a^2\, U_{xx}$$

بالشروط $v\,(0, t) = 0 \;;\quad v(l\,, t) = 0$

$$v(x,0) = \overline{\varphi}(x) \quad ; \quad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \overline{U}(x)$$

$$\varphi_t(x,0) = \psi(x)$$

(أي الدالة $v(x,t)$ هي الحل السابق).

يمكننا أيضاً مناقشة المسألة ذاتها إذا لم يكن هناك شروط ابتدائية.

الفصل الثاني

كلعأخلإ ة وئ تكمطرك لقأغئى

عند دراسة عمليات الإيصال الحراري والانتشار الحراري تصادفنا معادلات تسمى معادلات النمط المكافئي وأبسط أشكالها هو الشكل:

$$U_{xx} - U_{y} = 0 \qquad (y = a^2 t)$$

وتسمى معادلة التوصيل الحراري

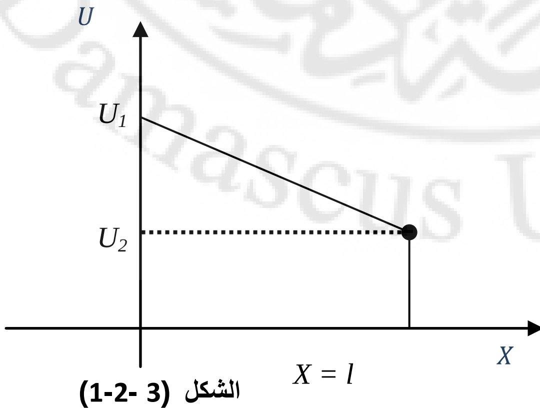
(3−2−1) مسائل تؤدي إلى معادلات ذات نمط مكافئي:

أ . مسألة انتشار الحرارة بشكل خطي:

لندرس حالة قضيب متجانس طوله l معزول حرارياً من جوانبه ورقيق بشكل كاف لتكون الحرارة واحدة في أي مقطع عرضي للقضيب، وإذا كانت U_2, U_1 درجتا الحرارة عند طرفي القضيب فإننا نعلم أن دستور انتشارها الخطي هو:

$$U(x) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

والشكل التالي يوضح انتشار الحرارة في القضيب.



الشكل (3 -2-1)

إن الحرارة تجري من الطرف الأكثر (سخونة) حرارة إلى الطرف الأقل سخونة وكمية الحرارة السارية خلال مقطع مساحته S (في واحدة الزمن) تعطى وفق القانون التجريبيين التاليين:

$$Q = -k\frac{u_2 - u_1}{l}S = -k\frac{\partial u}{\partial x}S \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

حيث k عامل التوصيل الحراري الذي يعتمد على مادة القضيب، ولقد اصطلح على اعتبار التدفق الحراري موجباً إذا كانت الحرارة تنتقل باتجاه تزايد x.

إن عملية انتشار الحرارة في قضيب يمكن وصفها بوساطة دالة $u(x,t)$ وهي التي تعبر عن درجة الحرارة في النقطة x وفي اللحظة t.

لنبحث عن المعادلة المناسبة لهذه العملية، وقبل ذلك لنحدد القوانين الفيزيائية الحاكمة لعملية الانتشار هذه.

1 . قانون فورييه:

في حالة كون الحرارة على القضيب غير متجانسة فإن انتشارالحرارة يتم من المواضع ذات الدرجة الأعلى إلى المواضع ذات الدرجة الأدنى، وتكون كمية الحرارة السارية في المقطع ذي الفاصلة x وخلال الزمن dt مساوية لـ

$$dQ = q\,S\,dt \quad \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

حيث

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3\text{-}2\text{-}4)$$

كثافة التدفق الحراري وهذه الكثافة تساوي كمية الحرارة السارية في وحدة الزمن خلال مساحة قدرها $1\ cm^2$ ويمكن فهم هذه الكمية وفق العلاقة:

$$Q = \int_{t1}^{t2} dq = -S\int_{t1}^{t2} k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3\text{-}2\text{-}5)$$

وعندما يكون القضيب غير متجانس فإن المعامل k يكون تابعاً لـx أي شكله $k(x)$.

2 . معلوم في علم الحرارة أن كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة جسم ما متجانس بمقدار Δu هي

$$Q = C.\ m\ .\ \Delta u = s\ \rho\ V\ \Delta\ u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\text{-}2\text{-}6)$$

حيث c تمثل السعة الحرارية النوعية وm كتلة الجسم وρ كثافته و v حجمه.

ويمكننا الحصول على علاقة تكاملية للكمية الحرارة Q لكتلة محددة بالنقطتين x_2, x_1 كما يلي:

$$Q = \int_{x1}^{x2} c\rho v \Delta u(x) dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots. \quad \ldots\ldots.(3\text{-}2\text{-}7)$$

3 . من المعلوم أنه يحدث امتصاص لانتشار الحرارة داخل القضيب (مثل حالة مرور تيار كهربائي أو نتيجة تفاعلات كيميائية .....إلخ)، فلنفرض أن $F(x,t)$ هي الدالة الممثلة لكثافة الحرارة المنبعثة من النقطة x في اللحظة t، وخلال فترة dt تنبعث حرارة من القطعة ذات الطول dx تساوي:

$$dQ = S\ F(x, t)\ dx\ dt \qquad \ldots \qquad (3\text{-}2\text{-}8)$$

أو

$$Q = S\int_{t1}^{t2}\int_{x1}^{x2} F(x,t) dx dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}2\text{-}9)$$

حيث Q هي الحرارة المنبعثة من الجزء (x_1, x_2) خلال الفترة (t_1, t_2).

فإذا استعنا بالعلاقات (3-2-5) و (3-2-7) و (3-2-9) وقانون حفظ الطاقة يمكننا كتابة:

$$\int_{t1}^{t2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\bigg|_{x=x2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\bigg|_{x=x1} \right] d\tau$$

$$+\int_{x1}^{x2}\int_{t1}^{t2} F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau = \int_{x1}^{x2} c\rho[u(\varepsilon_1 t_2)-u(\varepsilon,t_1)]\, d\varepsilon \qquad \ldots\ldots. \qquad (3\text{-}2\text{-}10)$$

وهي الصورة التكاملية لمعادلة التوصيل الحراري وللحصول على الصورة التفاضلية نفترض أن *U(x,t)* تقبل التفاضل مرتين بالنسبة لـ*x* ومرة واحدة بالنسبة لـ*t* (بعملية التفاضل قد نخسر بعض الحلول ولكن في حالتنا هذه هذا غير موجود) فنجد:

$$\left[\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x1}\right]\right]\Delta t +$$

$$F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t = \{c\rho[u(\varepsilon,t_2)-U(\varepsilon,t_1)]_{\varepsilon=x3} \quad \Delta x$$

..................*(3-2-11)*

وباستخدام نظرية التزايدات المحدودة نحصل على:

$$\frac{\partial .}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{\substack{x=x5\\t=t2}} \Delta t\Delta x + F(x_n,t_n)\Delta x\Delta t =$$

$$=\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{\substack{x=x3\\t=t3}} \Delta x.\Delta t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}2\text{-}12)$$

حيث $t_3, t_4, t_5, x_3, x_4, x_5$ نقط وسطية في الفترة (x_1, x_2) ، (t_1, t_2) على الترتيب.

وبعد الاختصار على $\Delta x, \ \Delta t$ نجد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x5\\t=t5}} + F(x,t)\Big|_{\substack{x=x4\\t=t4}} = C\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t3\\x=x3}}$$

وبالانتقال إلى الزيادات نجد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t) = C\rho\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}2\text{-}14)$$

وتسمى معادلة التوصيل الحراري .

✍ **حالات خاصة:**

1 . القضيب متجانس عندها تكون k , C, ρ ثوابت وتأخذ المعادلة (14−2−3) الشكل:

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t)$$

حيث

$$a^2 = \frac{k}{C\rho}, \ f(x,t) = \frac{F(x,t)}{C\rho}$$

يسمى a^2 معامل التوصيل الحراري وإذا انعدمت مصادر الحرارة $(F(x,t)=0)$ عندها نحصل على المعادلة:

$$U_t = a^2 U_{xx} \quad \text{...}(3\text{-}2\text{-}14)*$$

2 . إذا اعتمدت مصادر الحرارة فقط على درجة الحرارة عندها يخضع التبادل الحراري لقانون نيوتن (التبادل مع الوسط المحيط) وتكون كمية الحرارة التي يفقدها القضيب في وحدة الأطوال وواحدة الزمن من الشكل:

$$F_0 = h\,(u - \theta)$$

حيث $\theta \ (x, \ t)$ درجة حرارة الوسط المحيط وh معامل التبادل الحراري وبذلك تكون كثافة مصادر الحرارة هي:

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta) \quad \text{..}(3\text{-}2\text{-}15)$$

حيث $F_1(x,t)$ هي كثافة مصادر الحرارة الأخرى وإذا كان القضيب متجانساً فإن معادلة التوصيل الحراري مع التبادل الحراري الجانبي تأخذ الصورة:

$U_t = a^2 U_{xx} - \alpha U + f(x, t)$

حيث $\alpha = \frac{h}{C\rho}$ و $f(x,t)$ دالة معلومة.

3 . وأخيراً إذا درست حالة التوصيل الحراري خلال فترة زمنية كبيرة فإن هذه المعادلة تصبح معادلة شبه خطية.

ب . معادلة انتشار الغازات:

في حالتنا هذه عندما يكون الوسط (الوسط الغازي) غير متجانس التركيز فإن الانتشار يتم من المنطقة ذات التركيز الأعلى إلى المنطقة ذات التركيز الأدنى (نفس الحالة يمكن أن تحدث في المحاليل غير متجانسة التركيز).

لتكن لدينا أنبوبة مجوفة أو مملوءة بمادة مسامية مع افتراض تركيز للغاز في مقطع الأنبوبة في أي لحظة هو تركيز واحد. عندئذٍ فإن عملية الانتشار يمكن وضعها بالدالة $U(x,t)$ التي تعبر عن التركيز في المقطع x في اللحظة الزمنية t (هذا التركيز يتبع x).

وحسب قانون نرنست تكون كثافة الغاز المتسرب خلال المقطع x وفي الفترة Δt مساوية لـ

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)S.dt$$

$$= W\,S\,dt$$

حيث:

$$W = -D\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{.. (3-2-18)}$$

D معامل الانتشار وS مساحةالمقطع $W(x,t)$ كثافة التدفق الانتشاري وهي تساوي كتلة الغاز المتسربة في وحدة الزمن خلال وحدة المساحة ووفقاً لتعريف التركيز فإن كمية الغاز في الحجم V تكون مساوية لـ

$$Q = U . V$$

من هنا يمكننا أن نحصل على تغيير كتلة الغاز في منطقة الأنبوب المحددة بـ(x_1, x_2) عندما يتغير التركيز بـΔu كما يلي:

$$\Delta Q = \int_{x1}^{x2} C(x).\Delta U.S.dx$$

حيث $C(x)$ معامل المسامية.

وتكون معادلة توازن كتلة الغاز من تلك المنطقة خلال الفترة (t_1, t_2) هي:

$$S\int_{t1}^{t2}\left[D(x_2)\frac{\partial u}{\partial t}(x_2,\tau) - D(x_1)\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\tau)\right]\, d\tau =$$

$$= S\int_{x_1}^{x2} C(\varepsilon)\left[u(\varepsilon,t_2) - U(\varepsilon,t_1)\right] d\varepsilon$$

وبمناقشة مشابهة لما سبق في الفقرة السابقة نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\,\frac{\partial u}{\partial x0}\right) = C\,\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{...(3-2-15)}$$

وهي معادلة انتشار الغازات وهي كما نرى مشابهة لمعادلة التوصيل الحراري (بانعدام مصادر المادة وانعدام الانتشار عند جدار الأنبوبة).

ج ـ انتشار الحرارة في الفراغ:

يمكننا اعتبار الدالة $U(x,y,z,t)$ دالة معبرة عن درجة الحرارة في نقطة $M(x,y,z)$ في الفراغ في اللحظة t وتكون هذه الدالة إشارة مميزة لانتشار الحرارة في الفراغ، فإذا كان الوسط غير متجانس حرارياً نشأ تدفق حراري من المناطق الأعلى درجة إلى المناطق الأخفض درجة.

لنفترض $d\sigma$ سطح صغير يحيط بنقطة ما $M(\varepsilon, \eta, \zeta)$ من الفراغ وليكن $\hat{n}$ شعاع واحدة الناظم على هذا السطح. إن كمية الحرارة التي تخترق السطح $d\sigma$ خلال واحدة الزمن يعبر عنها وفق قانون فورييه بـ

$$W_n d\sigma = (W.n)d\sigma = -k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

بشكل آخر يمكن أن نعبر عن هذه الكمية بقانون فورييه

$$\vec{W} = -k\,\overrightarrow{grad\ u}$$

حيث W هي كمية شعاعية تمثل التدفق (كثافة التدفق الحراري) وسوف نعتقد في دراستنا على كون الوسط متشابهاً وأن k كمية سلمية.

ليكن V حجماً محدداً بالسطح S. إن معادلة التوازن الحراري للحجم V خلال الفترة $\Delta t = t_2 - t_1$ تكتب على الصورة:

$$\iiint_V C\rho[U(M,t_2) - U(M,t_1)dV_M =$$

$$-\int_{t1}^{t2} dt \iint_S Wnd\sigma + \int_{t1}^{t2} dt \iiint_V F(M,t)dv_M) \qquad \text{.........................(3-2-20)}$$

هذه الصورة تعبر عن قانون حفظ الحرارة في الحجم V خلال الفترة Δt والذي يقول إن كمية الحرارة في الحجم V خلال Δt تنتج بسبب تدفق الحرارة خلال السطح S (الحد الأول من الطرف الأيمن) وكذلك من كمية الحرارة المنبعثة من الحجم V خلال الفترة Δt نتيجة مصادر

الحرارة حيث $M(\xi,\eta,\varepsilon)$ نقطة $dV_M = d\xi d\eta d\varepsilon$ و $C\rho$ السعة الحرارية لواحدة الحجم و W_n التدفق الحراري الناظمي.

للانتقال من (3-2-20) إلى المعادلة التفاضلية نفترض $U(M,t)$ دالة تقبل التفاضل مرتين بالنسبة لـ M ومرة واحدة بالنسبة لـ t، وأن هذه المشتقات مستمرة وحسب علاقة غوص – أوستراغرادسكي:

$$\iint_S W_n d\sigma = \iiint_V divW \; dv$$

وعندها تصبح (3-2-20):

$$\iiint_v c\rho [U(M,t_2) - U(\rho,t_1)] dV_M =$$

$$-\int_{t1}^{t2} dt \left(\iiint div\, W \; dV_M \right) + \int_{t1}^{t2} \iiint_V F(M,t) dv_M \, dt$$

وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى ونظرية التزايدات المحدودة للدوال ذات المتحولات الكثيرة نحصل على:

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t3 \\ M=M1}} .\Delta t.V = \left[-divW \Big|_{t=t4} + F \Big|_{t=t5} \right] .\Delta t.V$$

حيث t_2, t_3, t_4 نقط وسطية من Δt و M_1, M_2, M_3 نقط من V. نثبت $M(x,y,z)$ داخل V مركز الحجم V ونجعل $\Delta t \to 0$ ونختصر على $\Delta t.\ V$ فنجد:

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = -divW(x,y,z,t) + F(x,y,z,t)$$

نعوض عن $W = -k\, \overrightarrow{grad\ u}$ فنجد:

$$C\rho.U_t = div(k\,\overrightarrow{gradu}) + F$$

أو

$$U_t = a^2(\nabla^2 U) + \frac{F}{C\rho} \quad \text{...} \ (3\text{-}2\text{-}21)$$

حيث $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ وهي المعادلة المطلوبة.

☜ **ملحوظة:**

من المفيد ملاحظة أن المعادلة الأخيرة يمكن أن نطبق عليها شروطاً حدية وابتدائية مختلفة.

(*3*–*2*–*2*): طريقة فصل المتحولات والمعادلات ذات النمط المكافئي:

لتكن لدينا المعادلة:

$$U_t = a^2\, U_{xx} + f(x, t) \quad \text{...} (3\text{-}2\text{-}22)$$

حيث $t > 0 \quad ; \quad 0 < x < l$

والشروط الابتدائية والحدية التالية:

$$U(x,0) = \varphi(x) \quad ; \quad (0 \le x \le l) \quad \text{..............................} (3\text{-}2\text{-}23)$$

$$U(0,t) = \mu_1(t) \quad ; \quad U(l,t) = \mu_2(t) \qquad t > 0 \quad \text{.........................} (3\text{-}2\text{-}24)$$

لنبدأ بحل المسألة البسيطة (عند كون المعادلة متجانسة):

$$U_t = a^2\, U_{xx} \qquad 0 \le t \le T \qquad 0 < x < l \ .. \qquad (3\text{-}2\text{-}25)$$

$$U(0,t) = U(l, t) = 0 \ \text{...............} \ U(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{....} \ (3\text{-}2\text{-}26)$$

لنفرض شكل الحل كما يلي:

$$U(x, t) = X(x) \, . \, T(t) \qquad \ldots\ldots (3\text{-}2\text{-}27)$$

نعوض في (3-2-25) فنجد:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T`}{T} = \frac{X``}{X} = -\lambda$$

حيث λ ثابت وبذلك نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$X`` + \lambda X = 0 \qquad \ldots\ldots (3\text{-}2\text{-}28)$$

$$T` + a^2 \lambda T = 0 \qquad \ldots\ldots (3\text{-}2\text{-}29)$$

ومن الشروط الحدية نجد:

$$X(0) = X(l) = 0$$

وكما مر معنا سابقاً فإن حل المعادلة (3-2-28) يكون من الشكل:

$$X_n(x) = Sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث $\left(\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right)$ ويقابل هذا الحل حل للمعادلة (3-2-29) هو:

$$T_n(t) = C_n \quad .e^{-a^2\lambda nt}$$

ومنه يكون حل المعادلة (3-2-25) هو:

$$U(x,t) = \sum_{H=1}^{\infty} C_n.e^{-a^2\lambda nt} Sin\frac{n\pi}{l}x$$

ومن أجل $t = 0$ نجد:

$$U(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n Sin\,\frac{n\pi}{l}x$$

وحسب نظرية نشر فورييه نجد أن:

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) Sin\,\frac{n\pi}{l}x dx$$



الفصل الثالث

(3–3–1): المعادلات ذات النمط الناقصي:

عند البحث عن عمليات مستقرة نلاحظ أنه مهما اختلفت الطبيعة الفيزيائية لهذه العمليات (اهتزازات، توصيل حراري، انتشار غازات) فإننا نصل بالنتيجة إلى معادلات ذات نمط ناقصي وأكثر هذه المعادلات شيوعاً هي معادلة لابلاس:

$\nabla^2 U = 0$ ………………………………………………………..(3-3-1)

(3–3–2): مسائل يؤول حلها لمعادلة لابلاس:

أ . المجال الحراري المستقر:

لقد وجدنا سابقاً أن المعادلة الناتجة عن دراسة مجالٍ حراريٍ مستقر (معادلة التوصيل الحراري) هي من الشكل:

$U_t = a^2 \, . \, \nabla^2 u$ .... $\left(a^2 = \frac{k}{C\rho} \right)$ .... (3-2-2)

وعندما تكون العملية مستقرة (أي لا تعتمد على الزمن) فإن توزع الحرارة لا يتعلق بالزمن أي $U_t = 0$ ومنه نحصل على المعادلة:

$\nabla^2 U = 0$

وهي معادلة لابلاس.

وإذا وجدت مصادر حرارة أخرى فإننا نحصل من المعادلة (3-3-2) (بالاستقرار) على:

$\nabla^2 U = -f \qquad f = \frac{F}{k}$ .... (3-3-3)

حيث F كثافة المصدر الحراري وk معامل التوصيل الحراري ونحصل على معادلة (3-3-3) تسمى معادلة بواسون.

ليكن المطلوب تعيين دالة $U(x,y,z)$ (ولتكن درجة الحرارة) المحققة داخل حجم T المعادلة:

$$\nabla^2 U = - f\,(x,y,z)$$

بشروط حدية من أحد الأشكال التالية:

1. $U = f_1$ على السطح Σ المحيط بـT.

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = f_2$ على السطح Σ.

3. $\frac{\partial u}{\partial t} + h(u - f_2) = 0$ على Σ.

حيث f_3, f_2, f_1, h دوال معروفة، و $\frac{\partial u}{\partial x}$ المشتق الناظمي لـU على Σ.

تطبيقات:

في الحالة الأولى نسمي المسألة مسألة ديرخليه،وفي الحالة الثانية والثالثة فتسمى المسألة مسألة نيمان.

وكمثال على ذلك ندرس مسألة التيار الجهدي للسائل بدون مصادر خارجية:

بفرض T حجم محدود بسطح موجه Σ ويحوي تيار مستقر لسائل غير قابل للانضغاط كثافته ρ وسرعته $v\,(x,y,z)$، وإذا كان هذا التيار كمونياً (محافظاً) فإن سرعته v تحقق:

$$V = - grad\ \varphi \qquad \text{……………………………………………..(3-3-4)}$$

حيث φ دالة سلمية تسمى كمون السرعة وعند انعدام المصادر (أي كان الحقل v لولبياً) أي:

$$div \quad v = 0$$

فإن φ يكون توافقياً (كمون السرعة).

– ليكن لدينا تيار مستقر (محافظ) ذو كثافة حجمية $j \quad (x,y,z)$ ، فإذا انعدمت المصادر الحجمية للتيار في الوسط فإن:

$$div \quad j = 0 \qquad \text{………………………………………………….…. (3-3-6)}$$

وإذا كان E هو المجال الكهربائي المحدد بوساط كثافة التيار وفق قانون أوم بـ

$$E = \frac{j}{\lambda} \qquad \text{...(3-3-7)}$$

حيث λ الناقلية في الوسط، والعملية تتم بشروط الاستقرار، ويكون ضمن هذه الشروط المجال E محافظاً أي:

$$E = - \quad grad \quad \varphi$$

حيث يمكننا كتابة:

$$j = - \lambda \quad grad \quad \varphi$$

وبذلك نجد:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad \text{...(3-3-8)}$$

أي أن جهد التيار (كمون التيار) يحقق معادلة لابلاس.

يمكننا أيضاً دراسة المجال الكهربائي للشحنات المستقرة أي المحققة لـ $rot\ E = 0$ ومنه حسب التحليل الشعاعي يمكننا أن نكتب:

$$E = -\ grad\ \varphi$$

حيث φ هو كمون الحقل.

وبفرض $\rho\ \ (x,y,z)$ الكثافة الحجمية للشحنات الموجودة في الوسط (بفرض أن عامل نفوذية الوسط يساوي $\varepsilon_0 = 1$) فنجد حسب القانون الرئيسي في الكهرباء الديناميكية.

$$\iint_S E_n ds = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T \rho dT$$

حيث T حجم ما وS سطح يحيط بـT وأما $\sum e_i$ فهي مجموع الشحنات داخل T وحسب قانون غوص . أوستراغرادسكي:

$$\iint_S E_n ds = \iiint_T divE\ d\tau$$

فإننا نحصل على

$$div\ E = 4\ \pi\ \rho$$

وإذا عوضنا عن $E = -\ grad\ \varphi$ نجد:

$$\nabla^2 \varphi = -\ 4\ \pi\ \rho$$

أي أن الكمون الكهربائي في هذه الحالة يحقق معادلة بواسون.

وعند انعدام الشحنات $(\rho = 0)$ فإن φ تحقق معادلة لابلاس.

(3-3-3): بعض حلول معادلة لابلاس:

تشكل حلول معادلة لابلاس ذات التماثل الكروي أو الأسطواني (تلك الحلول التي تعتمد على متحول واحد) أهمية خاصة.

إن حل معادلة لابلاس ذي الشكل $U = U(r)$ (ذي التماثل الكروي) يتحدد من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$$

وبتكامل هذه المعادلة نحصل على:

$$U=\frac{c_1}{r}+C_2$$

وباختيار مناسب للثوابت C_1, C_2 نحصل على:

$$U=\frac{1}{r}$$

والدالة هذه تسمى عادة الحل الأساسي لمعادلة لابلاس.

وعندما تكون الدالة معينة أسطوانياً ومتعلقة فقط بالمتحول ρ أي:

$$U = U(\rho)$$

فإن الحل يكون من الشكل:

$$U = C_1 \ln \rho + \rho_2$$

وباختيار مناسب للثوابت نجد:

$$V_0 = \ln \frac{1}{\rho}$$

وتسمى الدالة أيضاً بالحل الأساسي لمعادلة لابلاس في المستوي (بمتحولين مستقلين).

☜ **ملاحظات:**

إن الدالة $U = \frac{1}{r}$ معينة في كل الفراغ عدا في نقطة المبدأ فتصبح لا نهائية وبدقة مناسبة يمكن أن نركز الشحنة النقطية e في نقطة الأصل ونحصل على الكمون عندها:

$$U = \frac{e}{r}$$

بنفس الطريقة يمكن أن تكون الدالة $U_0 = \ln\frac{1}{\rho}$ محققة لمعادلة لابلاس وبدقة مناسبة يمكن هذه الخاصة عندما $\rho = 0$ ويكون لدينا:

$$U = 2e_i \quad \ln\frac{1}{\rho}$$

حيث e_i كثافة الشحنة في واحدة الطول. إن لهاتين الدالتين أهمية خاصة عند دراسة الدوال التوافقية.

(4−3−3): طريقة تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

عند تطبيق تحويل لابلاس على التابع المجهول $U(x,t)$ نحصل على تابع جديد وسيطي لنرمز له بـ$U(x, S)$ (وذلك بعد استبدال المتحول t بحدود التكامل في تحويل لابلاس)، ولهذا فإن:

$$\varphi\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{\partial u}{\partial x}.dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} . U(x,t)\, dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} U(x,S) = \frac{dU(x,S)}{dx}$$

$$\varphi\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = SU(x,S) - U(x,0)$$

$$\varphi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = S^2 U(x,S) - SU(x,0) - \frac{\partial U}{\partial t}(x,0)$$

$$\varphi\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2 U(x,S)}{dx^2}$$

هذا يعني أن المعادلة الناتجة هي معادلة تفاضلية عادية تابعها المجهول هو *U(x,S)*، ومن المفترض أننا نعلم حلها نطبق بعدها تحويل لابلاس العكسي على *U(x, S)* فنحصل على الحل المطلوب *U(x,t)*.

سنوضح هذه الطريقة من خلال حل مسائل رياضية فيزيائية نموذجية.

(3−3−5): أمثلة توضيحية:

لتكن الدالة *U(x,t)* الممثلة لدرجة حرارة قضيب متجانس طوله يساوي الوحدة محمولاً على محور السينات *(ox)*.

إن المعادلة الحاكمة لهذه الحالة (كما نعلم) هي من الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{dx^2}$$

لتكن لدينا الشروط الحدية والابتدائية التالية:

درجة الحرارة الابتدائية ثابتة وهي:

$U(x, o) = a$

في اللحظة $t = 0$ تؤثر على القضيب عند النهاية درجة حرارة هي $U(1,0) = b$ وعند النهاية الأخرى تكون درجة الحرارة صفر أي $U(0,0)=0$ والنهاية معزولة أي: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$

لنفترض أن $\varphi[U(x,t)] = U(x,S)$

وبملاحظة أن:

$$\varphi[U(1,t)] = U(1,S)$$

$$= \varphi[b] = \frac{b}{s}$$

$$\varphi\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}\right] = \frac{dU(0,s)}{dx} = 0$$

نطبق تحويل لابلاس على المعادلة المفروضة فنجد:

$$SU(x,S) - a = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} - SU = -a$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية العادية (كما نعلم) من الشكل:

$$U(x,S) = C_1\ ch\sqrt{s}x + C_2 Sh\sqrt{S}x + \frac{a}{S}$$

وحسب الشرط $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 0$ نجد

$C_2 = 0$

وحسب الشرط $\varphi[U(1,t)] = \frac{b}{S}$

لهذا نجد:

$$\frac{b}{S} = C_1 \; Ch\sqrt{s}x + \frac{a}{S}$$

أي:

$$C_1 = \frac{b+a}{Sch\sqrt{S}}$$

نعوض في عبارة *U(x, S)*.

$$U(x,S) = \frac{a}{S} + \frac{(b-a)}{sch\sqrt{s}} \; ch\sqrt{s}x$$

وبأخذ التحويل المعاكس:

$$U(x,t) = a + (b-a) \; \varphi^{-1}\left[\frac{ch\sqrt{s}x}{Sch\sqrt{s}}\right]$$

$$= a + (b-a)\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re}s\left[\; \left[e^{st} \; \frac{Ch\sqrt{s}x}{Sch\sqrt{s}}\right] \;\right]$$

وبحساب رواسب التابع $\frac{ch\sqrt{s}x}{Sch\sqrt{s}} e^{st}$ نجد أن الأقطاب هي:

$$S=0 \quad , \qquad S = S_n = -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} \qquad (n = 1,2,\ldots\ldots)$$

وبهذا نجد:

$$\operatorname{Res}\left[e^{st}\,\frac{ch\sqrt{s}x}{Sch\sqrt{s}},0\right]=1$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{st}\,\frac{Ch\sqrt{s}x}{Sch\sqrt{s}},S_n\right]=\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}.e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t}.\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x$$

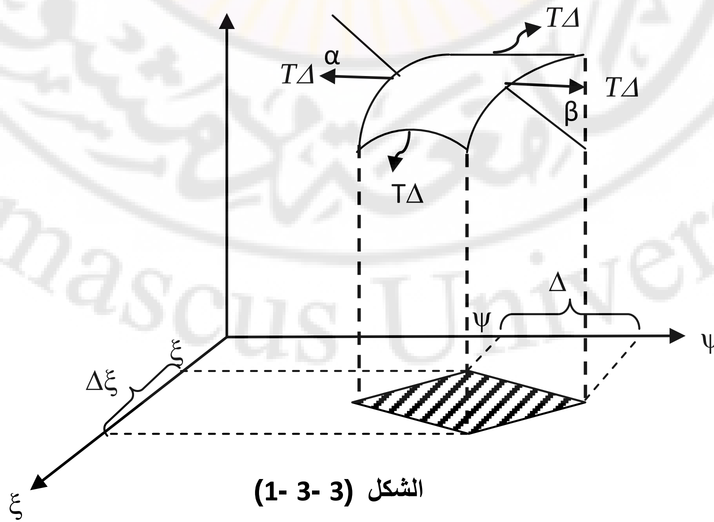
وبذلك يكون الحل:

$$U(x,t)=b+\frac{4(b-a)}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\,e^{\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}t}\,Cos\,\frac{(2n-1)}{2}\pi x$$

(*3–3–6*): المعاملات التفاضلية الجزئية بأكثر من متحول:

لندرس مسألة اهتزاز غشاء مرن أو ما يسمى بالمعادلة الموجية ذات البعدين.

لنفرض أن الغشاء مرن موجود في سطح مستو xy، وبفرض $\Delta s \approx \Delta x \;\; \Delta y$



الشكل (3 -3 -1)

نلاحظ أن القوى المؤثرة على القطع $\Delta y, \Delta x$ هي $T.\Delta x$, $T.\Delta y$ على الترتيب حيث T يمثل قوى التوتر في واحدة الأطوال، وبتقريب مقبول فإن زوايا الانحناء تكون صغيرة كافياً لنستبدل جيوب تمامها بالواحد وتكون المركبات الأفقية لهذه القوى متساوية ومتعاكسة مباشرة أي أن الحركة الأفقية معدومة ضمن تقريب مقبول، وأما المركبات الشاقولية فهي:

$T.\Delta y \ Sin\, \beta$, $- \ T.\Delta y \ Sin\, \alpha$

والمحصلة تكون:

$$T\Delta y(Sin\beta - Sin\alpha) \approx T.\Delta y(tg\beta - tg\alpha)$$

$$= T.\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right]$$

حيث $y + \Delta y > y_1, y_2 > y$

وتكون محصلة القوى المؤثرة شاقولياً على الطرفين الآخرين هي:

$$T.\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right]$$

حيث:

$x + \Delta x > x_1, x_2 > x$

إن القوى المحصلة الشاقولية على الكتلة $\rho\Delta x\ \Delta y$ حسب قانون نيوتن تساوي:

$$\rho\Delta x\Delta y\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T.\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right]$$

$$+ T.\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y+\mathrm{X}y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right]$$

وبالانتقال إلى النهايات $\Delta x \to 0$ ، $y \to 0$ نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \text{..} \ (3\text{-}3\text{-}9)$$

وهي المعادلة الموجبة لاهتزاز غشاء مرن ذات بعدين.

تطبيقات:

استخدام الإحداثيات المختلفة في المعادلات التفاضلية الجزئية:

إن استخدام أنظمة الأحداثيات المختلفة تسهل في بعض الأحيان حل المسائل فمثلاً، إذا كان الغشاء المهتز دائرياً عندها يسهل استخدام الإحداثيات القطبية التي نستخدم فيها التحويل:

$$x = r \ Cos \ \theta \quad , \quad y = r \ Sin \ \theta$$

فإذا فرضنا أن معادلة محيط الغشاء هي:

$$r = a$$

حيث a ثابت، وكان المطلوب حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

فإن استخدام الشكل القطبي لهذه المعادلة وهو:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{..................................} \ (3\text{-}3\text{-}10)$$

يسهل عملية الحل، وسنرى ذلك من أجل مسألة الغشاء الدائري ذي نصف القطر R.

إذا لاحظنا أن الحلول متناظرة قطرياً (أي لا تتعلق بالإحداثي θ) فإن المعادلة التفاضلية (*3-3-10*) تعود إلى الشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \ \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

لأن $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ ، وعندما يكون الغشاء ثابتاً على محيط أي $r = R$ فإن الشرط الحدي يصبح:

$$U(R, t) = 0$$

وبفرض أن $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(r)$

فإننا نستطيع حل المعادلة الأخيرة بطريقة فصل المتحولات كما يلي:

لنفرض أن شكل الحل هو:

$$U(r,t) = V(r) \, . \, g(t)$$

نشتق ونعوض في المعادلة الأخيرة فنجد:

$$V(r) . \frac{d^2 g}{dt^2} = a^2 \left[g(t) \, \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \, \frac{dv}{dr} \right]$$

نقسم على $a^2 \ v \ . \ g$ فنجد:

$$\frac{1}{a^2 g(t)} \, \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{V(r)} \left(\frac{d^2 vr)}{dr^2} + \frac{dV(r)}{dr} \right)$$

نلاحظ أن الطرف الأول يتبع t والثاني r وهما متساويان أي كل منهما ثابت لهذا نجد:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2 g(t)}\,\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -k^2 \\
&\frac{1}{V(r)}\left[\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dV(r)}{dr}\right] = -k
\end{aligned}\right\}$$

..........................(3-3-11)

أو

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + k^2\ a^2 g(t) = 0$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr} + k^2\ V(r) = 0$$

لنغير المتحول كما يلي:

$$V = k\,r$$

فنجد:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dr}.\frac{dV}{dr} = k\,\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(k\frac{dV}{dr}\right)$$

$$= k\,\frac{d^2V}{dr^2}.\frac{dV}{dr}$$

$$= k^2\,\frac{d^2V}{dr^2}$$

نعوض ونصلح فنجد:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr} + V(r) = 0$$

وهذه المعادلة كما نعلم تقبل الحل من النوع:

$$V(r) = C_1 J_0(\gamma) + C_2 Y_0(\gamma)$$

حيث $Y_0(r), J_0(r)$ تابعا بيسيل من النوعين الأول والثاني من المرتبة صفر.

وبما أن الغشاء محدود فإن $Y_0(r) \to \infty$ عندما $r \to 0$ ولهذا يلزم أن يكون $C_2 = 0$، وإذا أخذنا $C_1 = 1$ نجد:

$$V(r) = J_0 (r) = J_0 (kr)$$

أي الحل:

$$U(r,t)=g(t) J_0 (kr)$$

وحسب الشرط $U(R,t)= 0$ نجد:

$$U(R, t) = g (t) \ J_0 (KR) = 0$$

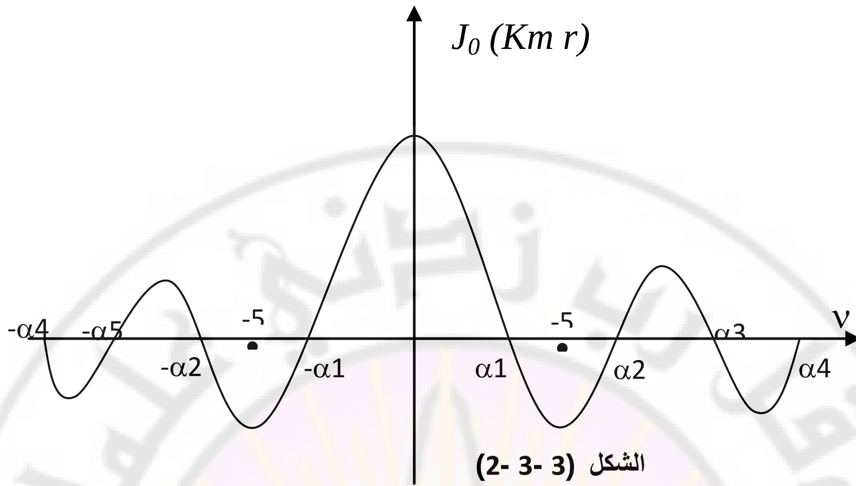
يمكن تعيين:

$$K = K_m = \frac{\alpha_m}{R}$$

حيث α_m الأصفار الموجبة لـ$J_0(r)$.

أي:

$$V_m(r) = J_0(K_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}\right)$$



الشكل (3 -3 -2)

(3–3–7): معادلة لابلاس بالأبعاد الثلاثة (نظرية الكمون):

من أهم المعادلات التفاضلية الجزئية معادلة لابلاس أي المعادلة:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{...} \; (3\text{-}3\text{-}12)$$

ولقد أطلق الرياضيون اسم نظرية الكمون أو نظرية الجهد على حل هذه المعادلة، ودعيت التوابع المحققة لها بالتوابع التوافقية والتي تتميز بأن مشتقاتها الثانية مستمرة.

لقد حلت هذه المسألة رياضياً بوساطة التحليل العقدي وتابع بمتحولين ، وسوف نذكر بعض حلولها في التطبيقات الهندسية في أبحاث الجاذبية حيث يعطي قانون نيوتن قوى الجاذبية بين كتلتين μ, m والبعد بينهما r كتابع $\vec{F}$ تدرجه هو التابع:

$$U = g.\frac{m.\mu}{r}$$

حيث g التسارع الأرضي وr يعطى كما يلي(r بعد الكتلة الأولى عن الثانية):

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

ويسمى التابع $U(x,y,z)$ بكمون حقل الجاذبية وهو تحقق معادلة لابلاس أي:

$\nabla^2 U = 0$ حيث $U = \frac{1}{r}$.

وعند دراسة الشحن الكهربائية ذات الكثافة $\rho\ (x,y,z)$ الموزعة على منطقة R في الفراغ فإن الكمون يعطى:

$$U(x,y,z) = K\iiint_R \rho dxdydz \qquad k > 0$$

والتابع $U = \frac{1}{r}$ حل لمعادلة لابلاس أي الكمون الكهربائي السابق حل لمعادلة لابلاس:

$$\nabla^2 u = K\iiint_R \rho \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dxdydz$$

وفي الكهرباء الساكنة تكون القوى المؤثرة هي قوى كولوم المماثلة لقوى نيوتن، وهذا يدل على أن كمون الحقل الناتج هو أيضاً حل لمعادلة لابلاس وهو توافقي أيضاً.

كذلك الأمر في مسألة انتشار الحرارة حيث تكون المعادلة الأساسية من الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C^2\ \nabla^2 U$$

وعندما تكون الحرارة غير م تعلقة بالزمن نحصل أيضاً على معادلة لابلاس ، وفي التطبيقات الهندسية نحتاج لحل معادلة لابلاس على سطوح معينة محددة وضمن شروط حدية وابتدائية معينة ، ولهذا نستخدم نظام الإحداثيات المناسب لشروط المسألة ، فإذا كان التناظر مركزياً فضلت الإحداثيات الكروية، وإذا كان التناظر محورياً فضلت الإحداثيات الأسطوانية وهكذا.

ولقد رأينا معادلة بيسيل في الإحداثيات القطبية ويمكن الحصول على معادلة ليجاندر في الإحداثيات الكروية.

Solved Problems (8 – 3 – 3) مسائل محلولة

مثال (1):

أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l \;,\; t > 0$$

حيث

$U(0,t) = 0 \quad , \; t > 0$

$U(l, t) = 0 \quad , t > 0$

$U(x,0) = 0 \qquad 0 \le x < l$

وهي تمثل معادلة انتشار الحرارة على قضيب متجانس طوله l ضمن شروط تحقق الانتشار الحراري المتساوي على سطح القضيب.

لنحل المعادلة بطريقة فصل المتحولات أي لنفرض أن الحل من الشكل:

$U(x,t) = X(x) \;.\; T(t)$

نبدل في المعادلة المفروضة فنجد:

$$\frac{X``}{X} = \frac{T`}{KT} = -\alpha^2$$

وهذا يعطي:

$X`` + \alpha^2 X = 0$

$T` + \alpha^2 K T = 0$

ومن الشروط الابتدائية والحدية نجد:

$$U(0,t) = X(0) \, . \, T(t) = 0$$

$$U(l, t) = X(l) \, . \, T(t) = 0$$

وهذا يعطي:

$$X(0) = 0 \quad , \quad X(l) = 0$$

مع المعادلة:

$$X``(x) + \alpha^2 X(x) = 0$$

وحلها كما نعلم:

$$X(x) = A \, Cos \, \alpha x + B \, Sin \, \alpha x$$

وحسب الشروط نجد أن الثابت $A = 0$، وحسب الشرط الحدي الآخر نجد:

$$X(l) = B \, Sin \, \alpha l = 0$$

ومنه $Sin(\alpha l) = Sin(n \pi) = 0$

أي أن الحل هو:

$$X_n(x) = B_n Sin \frac{n\pi}{l}$$

وأما المعادلة الأخرى:

$$T` + \alpha^2 K \, T = 0$$

فحلها كما نعلم هو حل أسي من الشكل:

$$T(t) = C \, . \, e^{-\alpha 2Kt}$$

أي $T_n(t) = .e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Kt}$

ويكون الحل:

$$U_n\,(x,t) = X_n\,(x)\,.\;T_n\,(t)$$

$$= a_n.e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin\frac{n\pi}{l}x \qquad ....\; n = 1,2,3,............$$

حيث $a_n = B_n\, C_n$

ويكون الحل:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin\frac{n\pi}{l}x$$

وحسب الشروط الابتدائية نجد:

$$U(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\; Sin\,\frac{n\pi}{l}x$$

والثابت a_n يتعين من نشر فورييه الفردي كما يلي:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l xSin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \frac{2l(-1)^n}{n\pi}$$

أي الحل المطلوب هو:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l xSin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right] e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\,\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n\pi} .e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin \frac{n\pi}{l} x$$

مثال(2):

أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x} \quad 0 \leq x < l \quad , t > 0$$

$$U(0,t) = 0 \ , \ U(l, t) = U_1 = cte$$

$$U(l,0) = x \qquad 0 < x < l$$

لنفرض:

$$U(x,t) = W(x,t) + \frac{U_1}{l} x$$

نبدل في المعادلة المفروضة فنجد:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l , t > 0$$

$$W(0, t) = 0 \ , W(l, t) = 0$$

$$W(x,0) = x - \frac{U_1}{l} x \qquad 0 < x < l$$

(وذلك اعتماداً على المثال (3))

ويكون الحل كما مر معنا في المثال السابق:

$$U(x,t) = \sum_{1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \left(x - \frac{u_0}{l} x \right) Sin\left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx \right] \square \left(e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} Sin \frac{n\pi}{l} x \right) + \frac{U_1}{l} x$$

مثال (3):

ليكن المطلوب إيجاد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\nabla^2 U(x,y) = 0 \qquad 0 < x < a \quad , \qquad 0 < y < b$$

$$U(x,0) = x \qquad 0 \le x \le a$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, y) = 0$$

$$U(x,b)=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(a, y) = 0$$

الممثلة لانتشار حرارة على مستطيل رقيق أبعاده a, b معزول من الطرفين.

طرفه الأول درجة حرارته صفر والثاني محدد بتابع ما $f(x) = x$

ليكن شكل الحل هو:

$$U(x, y)= X(x) \; . \; Y(y)$$

نبدل في المعادلة المفروضة فنجد:

$$X`` - \lambda X = 0$$

$$Y`` + \lambda = 0$$

ومن الشروط الحدية $x = 0 \;\; , \;\; x = a$ نجد:

$$\lambda = - \alpha^2 \qquad \alpha > 0$$

ومن أجل حل غير تافه:

$$X`` + \alpha^2 X = 0$$

$X`(0) = X`(a) = 0$

ويكون الحل:

$X(x) = A \, Cos \, \alpha x + B \, Sin \, \alpha x$

ومن الشروط الحدية نجد أن $B = 0$ و $\alpha = \frac{n\pi}{a}$ $n = 0,1,2$ ،... ومنه:

$$X_n(x) = A_n Cos \frac{n\pi}{a} x$$

أما حل معادلة Y فيكون من الشكل:

$$Y(y) = C \; ch \, \alpha y + D \; Sh \; \alpha y$$

وهي تكتب كما يلي:

$$Y(y) = E \, Sh \, (y + F)$$

حيث:

$$E = \sqrt{D^2 - C^2} \qquad ; \qquad F = th^{-1}\left(\frac{C}{D}\right) \Big/ \alpha$$

ومن الشروط الحدية $Y(b) = 0$ نجد:

$$Y(b) = E \, Sh \; \alpha (b + F) = 0$$

وهذا يؤدي $F = - b$

ويكون الحل:

$$U(x,y) = \frac{(b-y)}{b} \frac{a_0}{2} + \sum_{1=n}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi}{a} x \; Sh \, \frac{n\pi}{a} (y - b)$$

Supplementary Problems (9 – 3 – 3) مسائل إضافية

1–حل المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

أ– $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$n \succ 0 \quad , \quad t \succ 0$

$u(x,o) = x \qquad x \succ 0$

$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = 0 \qquad t \succ 0 \quad , \quad n \succ 0$

ب– $-\infty \prec x \prec \infty \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$u(x,o) = Sinx$

$u_t(x,0) = x$

جـ–حل مسألة ديرخليه

$\nabla^2 u = -2y \qquad o \prec x \prec 1 \quad , \quad o \prec y \prec 1$

$u(o,y) = o \quad ; \quad u(1,y) = o$

$u(x,o) = o \quad ; \quad u(x,1) = o$

2– أوجد حلاً لمسألة نيومان:

$\nabla^2 u = x^2 - y^2 \qquad o \prec x \prec a$

$$o \prec y \prec a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o, y) = o$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, o) = o$$

3–حل المعادلة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \qquad o \prec n \prec \infty \;\; ; \;\; t \succ \partial$$

$$u(x, o) = e^{-z} \qquad o \leq x \prec \infty$$

$$u(o, t) = o \qquad t \geq o$$

$$u(x, t) \to o \quad \forall t \qquad x \to \infty$$



مسائل عامة

<u>الباب الأول</u>

النموذج الأول

1. انشر التابع (الدالة) $F(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ وفق سلسلة لورانت وضمن الشروط $1 \prec |z| \prec 2$.

2. احسب التكاملات التالية :

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{25-24\cos\theta}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$I_3=\oint\frac{z+4}{z-\frac{\pi}{6}}dz$$

3. انظر فيما إذا كانت الدالة $w=z+\sin z$ تطبيقاً مطابقاً (محافظاً) على النطاق $|z| \prec 2$.

النموذج الثاني:

1. عين النقاط الشاذة للدالتين وبين نوع كل نقطة وعين الراسب عندها:

$$F_1(z)=\frac{1-e^{-z}}{1+e^z}$$

$$F_2(z)=\frac{\cos z}{z^2}$$

2. احسب التكامل $I = \oint_{\Gamma} (z-a)^n dz$ حيث: $\Gamma : |z-a| = r$

ناقش حسب قيم n حيث n عدد صحيح.

3. احسب التكامل الحقيقي التالي بواسطة نظرية الرواسب:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

4. عين النقاط الثابتة (غير المتغيرة) في التطبيق المطابق التالي:

$$w = t(z) = \frac{2z-5}{z+4}$$

النموذج الثالث:

1. انشر التابع العقدي $F(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ في جوار $z = 2$ واذكر قيمة الراسب عندها.

2. عيّن النقاط الشاذة ونوع كل منها والراسب عندها لكل من التوابع التالية:

$$F_1(z) = \frac{1-e^{2z}}{1+e^{2z}}$$

$$F_2(z) = \frac{\cos z}{z^3}$$

3. احسب قيمة التكاملات التالية:

$I_1 = \int_{\Gamma} \overline{Z}^2 dz$ حيث Γ هو المستقيم الواصل بين $A(0,0)$, $B(1,1)$.

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 4}$$

$$I_3 = \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\sin\theta}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)} dx$$

النموذج الرابع:

1. احسب التكامل $I = \oint_{\delta} \bar{z} dz$ حيث δ هو المثلث: $O(0,0), A(1,0), B(2,2)$.

2. بفرض $f(z)$ تابع تحليلي بسيط على المنطقة البسيطة R التي يحيط بها المنحني Γ وبفرض α نقطة داخلية من R فبرهن أن:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - \alpha)} dz$$

$$f^{n}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n-1}} dz$$

3. استخدم نظرية الرواسب في حساب قيمة التكامل:

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

النموذج الخامس:

1. برهن أن التابع $u(x,y) = (x-1)^2 + 2 - y^2$ توافقي ، ثم أوجد التابع $v(x,y)$ المرافق له والذي يجعل التابع $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلياً دوماً. اكتب عبارة $f(z)$ حيث: $z = x + iy$.

2. عيّن نوع النقطة الشاذة لكل من التوابع التالية واذكر قيمة الراسب عندها:

$$F_1(z)=\frac{1}{\cos(\frac{1}{z})}, F_2(z)=\frac{z^3+i}{z(z-i)^3}$$

3. احسب التكاملات التالية:

$$I_1=\int_{|z|=2}\frac{chz+\sin z}{(z-i\frac{\pi}{2})}dz$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{x^2}{x^2+i}dz$$

النموذج السادس:

1. أوجد القسم الحقيقي والقسم الوهمي للتابع $f(z)=sh2z$ ثم تحقق من شروط كوشي وريمان ليكون $f(z)$ تحليلياً.

2. لتكن $|z|=1$ دائرة ولتكن لدينا النقاط $A(1,0), B(0,1), C(1,2)$ وليكن Γ المثلث ABC، فاحسب قيمة التكامل : $I=\int_\Gamma \bar{z}dz$.

3. احسب قيمة التكاملات التالية:

$$\Im_1=\oint\frac{\cos z}{\sin z}dz, \Im_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}, \Im_3=\int_0^\infty\frac{\cos 3x}{x^2+1}dx$$

4. أوجد صورة المنطقة $|z-2|=1$ وفق التطبيق المطابق التالي:

$$W=f|z|=1+\frac{1}{z}, z\neq 0$$

النموذج السابع:

1. بفرض D منطقة بسيطة يحدها المنحني الموجه المغلق Γ، وبفرض $F(z)$ تحليلي على D فبرهن أن $D = \oint F(z)dz$.

2. عين نوع النقطة الشاذة لكل من التوابع التالية واحسب الراسب عند كل منها:

$$F_1(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$$F_2(z) = \frac{\sin z}{z^3}$$

$$F_3(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$$

3. احسب التكاملين التاليين:

$$I_1 = \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\sin\theta}$$

النموذج الثامن:

1. ليكن لدينا التابع العقدي : $W = \ln(z - 1 + \sqrt{z^2 - 2z + 2})$

عين مستعيناً بالرسم النطاق الذي يكون في التابع تحليلياً.

2. عين بالرسم وجود أو عدم وجود التكامل العقدي $\int_\Gamma \sqrt{z} dz$ حيث Γ نصف الدائرة الواقعة على يمين المحور OY في z .

3. أوجد قيمة التكاملين التاليين:

$$I_1 = \oint (z + \frac{2}{z}) ch(\frac{1}{z}) dz, |z| = 1$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \pi x . \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

النموذج التاسع:

1. ليكن $F(z) = \sqrt{(z^2 - 2z + 2)}$ عين مستعيناً بالرسم النطاق الذي يكون فيه $F(z)$ تحليلياً واحسب نصف قطر تقارب سلسلة ماك لورين للتابع $F(z)$ دون إيجاد النشر ثم بين فيما إذا كان التطبيق $F(z)$ تطبيقاً محافظاً (مطابقاً) على $|z| \prec 1$.

2. احسب قيمة التكاملات التالية:

$$I_1 = \oint_{|z|=1} (z - 4 + \frac{2}{z}) . e^{\frac{1}{z}} dz$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

$$I_3 = \int_{0}^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 7} d\theta$$

النموذج العاشر:

1. عين نوع النقطة الشاذة للتابع:

$$F(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

ونصف قطر تقارب سلسلة النشر في جوارها والراسب عندها، ثم احسب التكامل:

$$I=\oint_{|z-1|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}dz$$

2. احسب التكاملات التالية:

$$I_1=\oint_{|z|=4}\frac{e^z dz}{(z^2+\pi^2)^2}$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(4-3\sin\theta)^2}$$

نماذج على الباب الثاني:

النموذج الأول:

1. انشر التابع الدوري $f(x)=x(\pi-x)$ المعرف على الفترة $0 \prec x \prec \pi$ وارسمه على الفترة $(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ ثم احسب مجموع السلسلة $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}$.

2. أوجد تكامل فورييه للتابع:

$$F(x)=\begin{cases} 1 \Leftarrow |x| \prec 1 \\ \frac{1}{2} \Leftarrow |x| = 1 \\ 0 \Leftarrow |x| \succ 1 \end{cases}$$

ثم احسب قيمة التكامل: $I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$

3. احسب مقلوب تحويل لابلاس للتابعين:

$$F_1(S)=\frac{1}{S^2+2S+2}, F_2(S)=\frac{1}{S^2+2S+3}$$

4. حل المعادلة التكاملية التالية بواسطة تحويل لابلاس:

$$sht=\int_{0}^{t}\cos(t-v)z(v)dv$$

النموذج الثاني:

1. انشر التابع الدوري التالي:

$$F(x)=\begin{cases} x \Leftarrow 0 \prec x \prec 1 \\ x^2 \Leftarrow -1 \prec x \prec 0 \end{cases}$$

نشراً حقيقياً (مع الرسم) ثم استنتج النشر العقدي (الرسم على الفترة (-2,3)).

2. أوجد تكامل فورييه للتابع $F(x)=e^{-3|x|}$ ثم استنتج قيمة التكامل: $I=\int_0^\infty \frac{du}{u^2+9}$

3. بفرض $F(X)=La(f(x))$ أوجد $La(f'(t))$ (ناقش).

4. حل بوساطة تحويل لابلاس جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$x'(t)=z(t)-x(t), z'(t)=x(t)-z(t)$$

$$x(0)=z(0)=1$$

النموذج الثالث:

1. انشر بواسطة سلاسل فورييه التابع $F(x)=\sin x$ ، $0 \prec x \prec \frac{\pi}{2}$ وارسمه على الفترة $(-\frac{\pi}{2},2\pi)$ ثم استنتج مجموع السلسلة $\int_1^\infty \frac{1}{16x^2}dx$.

2. بين فيما إذا كانت الجملة $\{x,\sin x\}$ متعامدة على الفترة $(-\pi,\pi)$.

3. احسب التكاملات التالية بواسطة التوابع الخاصة :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \sqrt[3]{x}.e^{-x^3} dx, I_2 = \int_0^{3} x(27 - x^3)^{\frac{1}{3}} dx$$

4. احسب لابلاس التابع: $F(t) = \frac{e^{-3t}}{\sqrt[3]{t}}$

5. أوجد تحويل لابلاس العكسي (بطريقتين) للتوابع التالية:

$$F_1(S) = \frac{S^2 + S}{(S^2 + 1)(S + 1)^2}, F_2(S) = \frac{S}{(S^2 + 1)(S^2 - 1)}$$

النموذج الرابع:

1. انشر التابع الدوري $F(X)$ نشراً حقيقياً وارسمه على الفترة $(-\pi, \pi)$ حيث:

$$F(X) = \begin{cases} x + 1 \Leftarrow 0 \prec x \prec \pi \\ x - 1 \Leftarrow \pi \prec x \prec 2\pi \end{cases}$$

2. عرف التوابع الخاصة: $\beta(a,b), \Gamma(a)$ ثم اكتب علاقة تربط بينهما.

3. اذكر نص نظرية الطي وبرهن على صحتها.

4. حل المعادلة التفاضلية التالية بواسطة تحويل لابلاس:

Z''(t)+3z'(t)+2z(t)=t

Z(0)=z'(t)=0

5. حل جملة المعادلات التفاضلية التالية بوساطة تحويل لابلاس:

Z'(t)+x'(t)=cost   x(0)=0   t>0

Z'(t)-x'(t)=sint　　　　　　*z(0)=0*

النموذج الخامس:

1. بفرض $F(X)=X \ , 0<X<1$ انشر هذا التابع الدوري نشراً وفق سلسلة جيوب تمام.

2. بفرض: $F(x)=\begin{cases} x+1 \leftarrow \left|X\right|<1 \\ 0 \leftarrow \end{cases}$ عدا ذلك

أوجد تكامل فورييه لـ $F(X)$ ثم احسب $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$.

3. احسب بوساطة التوابع الخاصة التكامل: $J=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$.

4. بفرض : $F(S)=La[F(t)]$ أوجد التحويل العكسي للتابع: $F_{(S)}^{(X)}$.

5. أوجد بطريقتين التحويل العكسي اللابلاسي لـ: $F(S)=\frac{1}{S(S^2+1)}$

النموذج السادس:

1. انشر التابع الدوري: $F(X)=X^2, -\pi \le X \le \pi$ نشراً حقيقياً ثم ارسمه على الفترة $(0,4\pi)$ ثم احسب مجموع السلسلة:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-...$$

2. برهن على صحة العلاقة:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4a\sqrt{2\pi}}, a > 0$$

3. احسب بوساطة تحويل لابلاس التكامل:

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-6t} - e^{-5t}}{t} dt$$

4. احسب لابلاس التابع الدوري:

$$F(t) = \begin{cases} t \Leftarrow 0 \prec t \prec 1 \\ 0 \Leftarrow 1 \prec t \prec 2 \end{cases}$$

ثم حل المعادلة التفاضلية العادية التالية:

z''-z=t   z(0)=z'(0)=0   , t >0

النموذج السابع:

1. بفرض *f(x)* تابع دوري دوره 2π ومعرف كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} x \Leftarrow -\pi \prec x \prec 0 \\ -x \Leftarrow 0 \prec x \prec \pi \end{cases}$$

أوجد نشر فورييه الحقيقي لـ*f(x)* وارسمه على الفترة $(-2\pi,2\pi)$ ثم أوجد النشر العقدي.

2. احسب التكامل $I = \int_0^1 x^m (\ln(x))^n dx$ حيث *m,n* أعداد طبيعية.

3. احسب ما يلي: $La[e^{-t}\int_0^t t^2 \sin(t)dt], La^{-1}[\frac{3S+1}{S^3-S^2+S-1}]$.

4. حل المعادلة التفاضلية العادية بواسطة تحويل لابلاس:

$z''+z=t \quad , z(0)=1 \quad , \ z'(0)=-2$

النموذج الثامن:

1. انشر فورييه في سلسل جيوب تمام التابع $F(X)=X\pi - X^2$ ثم احسب مجموع السلسلتين: $\sum_1^\infty \frac{1}{X^2}, \sum_1^\infty \frac{(-1)^{X-1}}{X^2}$.

2. برهن على صحة ما يلي: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}$.

3. بفرض $F(t)=\begin{cases} 1 \Leftarrow 0 \prec t \prec 1 \\ -1 \Leftarrow 1 \prec t \prec 2 \end{cases}$: تابع دوري فبرهن أن : $La[F(t)]=\frac{1}{S}th\frac{S}{2}$

4. حل المعادلة التكاملية التالية:

$$\int_0^t \frac{z(u)}{\sqrt{t-u}}du = 1+t+t^2, t>0$$

5. احسب اللابلاس العكسي لـ:

$$F(S)=\frac{2S^3+10S^2+8S+40}{S^2(S^2+9)}$$

النموذج التاسع:

1. انشر التابع الدوري $F(X)=X$ حيث $0<x<2\pi$ وفق فورييه ثم احسب مجموع السلسلة : $\int_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2. اكتب التابع: $F(t)=\begin{cases}\sin t \Leftarrow t>\pi \\ \cos t \Leftarrow 0<t<\pi\end{cases}$ وفق توابع الوحدة $u(t)$ ثم احسب :

$La[F(t)]$

3. حل المعادلة التفاضلية التالية:

$t>0 \ : \ z''(t)-tz'(t)+z(t)=0$

$z(0)=z'(0)=0$

4. احسب التكامل: $I=\int_0^\infty t^3 e^{-t}\sin t dt$

النموذج العاشر:

1. انشر التابع الدوري التالي:

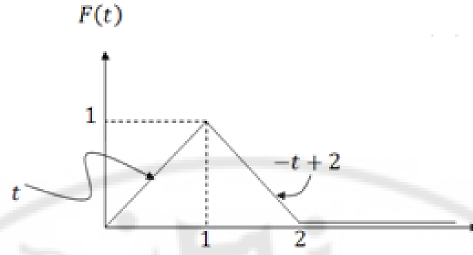
$$F(x)=\begin{cases}-e^x \Leftarrow -\pi<x<0 \\ e^{-x} \Leftarrow 0<x<\pi\end{cases}$$

وفق سلسلة فورييه وارسمه على الفترة $(-2\pi,2\pi)$ ثم برهن على:

$$\frac{\pi}{2ch\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}+\frac{5}{26}-\frac{7}{50}+\dots$$

2. استخدم عبارة $\Gamma(a)$ التابع للبرهان على $La[t^n u(t)]=\frac{\Gamma(n+1)}{S^{n+1}}$.

3. بفرض $f(t)$ معرف كما في الشكل:



اكتب عبارة $F(t)$ بدلالة توابع الوحدة ثم حل المعادلة التفاضلية:

$$t>0 \quad \rightarrow z'(t)+t=F(t),\ z(0)=0$$

الجواب: $F(t)=t\,u(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$

نماذج على الباب الثالث

النموذج الأول:

1. اشرح بالتفصيل طريقة دالامبير في حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$u_{tt} = u_{xx}(x,t)$$

حيث: $\begin{array}{l} F(X) = U(x,0) = x \\ G(X) = U_t(x,0) = x^2 \end{array}$

2. أوجد بطريقة فصل المتحولات حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), 0 \le x \le 1$$
$$u(x,0) = 3\sin 2\pi x$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

النموذج الثاني:

1. أوجد بطريقة فصل المتحولات حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$U(0,t)=u(1,t)=o$$

$$u(x,0) = x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} |= \sin x$$

2. أوجد باختصار حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{tt}(x,t) = 36 u_{xx}(x,t)$$

$$U(x,o) = f(x) = x^2 + x + 1$$

$$u_t(x,0) = G(x) = \sin x$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

النموذج الثالث:

1. أوجد بطريقة لابلاس حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, u_t(x,0) = x$$
$$u(x,0) = 0, 0 \le x \le 1$$

2. اشرح بالتفصيل طريقة دالامبير في حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{tt}(x,t) = 9u_{xx}(x,t)$$
$$u(x,0) = x^3, u_t(x,0) = 0$$

النموذج الرابع:

1. حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t)$$
$$u(x,0) = x, u_t(x,0) = 0$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

2. أوجد بطريقة فصل المتحولات حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_x(x,t) = 2u_t(x,t) + u(x,t)$$
$$0 < x < e$$
$$u(x,0) = 6e^{-3x}$$

علما أن $u(x,t)$ يبقى محدوداً مهما تكن x.

النموذج الخامس:

1. حل المعادلة التفاضلية الجزئية بطريقة فصل المتحولات:

$$
\begin{aligned}
& u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \\
& u(o,t) = u(\pi,t) = 0 \\
& u(x,0) = 0.02(\pi x - x^2) \\
& u_t(x,0) = 0
\end{aligned}
$$

2. أوجد بطريقة دالامبير حل المعادلة:

$$
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, a > 0
$$

والتي تمثل اهتزاز خيط مرن متجانس مشدود من $-\infty$ إلى $+\infty$ حيث:

$$
u(x,0) = F(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \Leftarrow x^2 \leq 1 \\ 0 \Leftarrow x^2 \leq 1 \end{cases}
$$

وترك دون سرعة ابتدائية.

الجداول

التوابع الخاصة

$C(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^X \cos U^2 au$ تكامل فرينل الجيبي
$c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^9}{9.4!} - \frac{x^{13}}{13.6!} + \cdots\right)$ $c(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{(\sin x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1.3}{2^2x^5} + \frac{1.3.5.7}{2^4x^9} - \cdots\right) - (\cos x^2)\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1.3.5}{2^2x^7} + \cdots\right)\}$ C(-x)=-c(x) , c(0)=0 , $c(\infty) = \frac{1}{2}$
$\xi(X) = \frac{1}{1^X} + \frac{1}{2^X} + \frac{1}{3^X} + \cdots$ تابع ريمان زيتا
$\xi(X) = \frac{1}{\Gamma(X)}\int_0^\infty \frac{U^{X-1}}{e^{u-1}}du, \quad x > 1$ $\xi(1-x) = 2^{1-x}\pi^{-x}\Gamma(x)\cos(\pi x/2)\xi(x)$ $\xi(2k) = \frac{2^{2k-1}x^{2k}B^K}{(2K)!} \quad K = 1,2,3,\ldots$ $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots$ *If* *n≠0,1,2,.....,* $J_n(x)$ *and* $J_{-n}(x)$ are linearly independent *If* *n≠0,1,2,.....,* $J_n(x)$ is bounded at $x = 0$ while $J_{-n}(x)$ is unbounded $J_0(X) = 1 - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^4}{2^24^2} - \frac{X^6}{2^24^26^2} + \ldots$ $J_1(X) = \frac{X}{2} - \frac{X^3}{2^24} + \frac{x^5}{2^24^26} - \frac{x^7}{2^24^26^28} + \cdots$ $J_0'(X) = -J_1(X)$

توابع بيسيل النوع الثاني من الرتبة n
$y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n \neq 0,1,2,\ldots \\ \lim\limits_{p\to n}\dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(X)}{\sin P\pi} & n \neq 0,1,2\ldots \end{cases}$
توليد التوابع لـ $J_n(x)$
$e^{x(t-1)/2} = \sum_{n=}^{\infty} J_n(x)t^n$
الصيغ العودية (الإرجاعية) لتوابع بيسيل
$J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)$ $J'_n(x) = \dfrac{1}{2}\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}$ $xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$ $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$ $\dfrac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$ $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$
توابع بيسيل ذات الرتبة النصف فردية
في هذه الحالة يمكن التعبير عن التوابع بدلالة النسب المثلثية الجيب والتجيب: $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$, $J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\dfrac{\cos x}{x} + \sin x\right)$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, cosx \quad , \quad J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \{(\frac{3}{x^2-1)}\, \sin x - \frac{3}{x}\, cosx\}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - cosx\right) \quad , \quad J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{3}{x}\, sinx + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) cosx\right\}$$

وللمزيد من النتائج يمكن استخدام الصيغ العودية الآنفة الذكر.

توابع هانكيل من النوع الأول والثاني بالرتبة N

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \qquad H_n^{(1)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

معادلة بيسيل التفاضلية المعدلة (المكيفة)

$$X^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \quad n \geq 0$$

تسمى حلول هذه المعادلة بتوابع بيسيل المعدلة من الدرجة n.

توابع بيسيل المعدلة (المكيفة) من النوع الأول والرتبة n

$$I_n(x) = e^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} j_n(ix)$$

$$\frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$$I_{-n}(x) = i^n j_{-n}(ix) = e^{\frac{n\pi i}{2}} J_{-N}(IX)$$

$$= \frac{X^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2.4(2-2n)(4-2n)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\Gamma(k+1-n)}$$

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

If $n \neq 0,1,2,\ldots..,$ $I_n(x)$ *and* $I_{-n}(x)$ **are linearly independent**

FOR n=0,1, we have

$$I_0(X) = 1 + \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^4}{2^2.4^2} + \frac{X^7}{2^2.4^2.6^2} + \cdots$$

$$I_1(X) = \frac{X}{2} + \frac{X^3}{2^2.4} + \frac{X^5}{2^2.4^2.6} + \frac{X^7}{2^2.4^2.6^2.8} + \cdots$$

$$I_0(X) = I_1(X)$$

توليد التوابع من أجل$I_n(x)$
$e^{x(t+1)/t)/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$
الصيغ العودية (الإرجاعية) لتوابع بيسيل المعدلة
$I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} I_n(x),\ \ k_{n+1}(x) = k_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} k_n(x)$ $I'_N(X) = \frac{1}{2}\{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\ \ ,\ \ k'_N(X) = \frac{1}{2}\{k_{n-1}(x) + k_{n+1}(x)$ $xI'_n(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x),\ \ xk'_n(x) = xk_{n-1}(x) - nk_n(x)$ $xI'_n(x) = xI_{n+1}(x) + nI_n(x)\ \ ,\ \ xk'_n(x) = xk_{n+1}(x) + nk_n(x)$ $\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x) = x^n I_{n-1}(x)\ ,\ \ \frac{d}{dx}\{x^n k_n(x) = x^n k_{n-1}(x)$ $\frac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x) = x^{-n} I_{n+1}(x)\ ,\ \ \frac{d}{dx}\{x^{-n} k_n(x) = x^{-n} k_{n+1}(x)$

القيم العددية لبعض توابع بيسيل

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	1.00000000	0.00000000	$-\infty$	$-\infty$
0.2	0.99002497	0.09950083	−1.08110532	−3.32382499
0.4	0.96039823	0.19602658	−0.60602457	−1.78087204
0.6	0.91200486	0.28670099	−0.30850987	−1.26039135
0.8	0.84628735	0.36884205	−0.08680228	−0.97814418
1.0	0.76519769	0.44005059	0.08825696	−0.78121282
1.2	0.67113274	0.49828906	0.22808350	−0.62113638
1.4	0.56685512	0.54194771	0.33789513	−0.47914697
1.6	0.45540217	0.56989594	0.42042690	−0.34757801
1.8	0.33998641	0.58151695	0.47743171	−0.22366487
2.0	0.22389078	0.57672481	0.51037567	−0.10703243
2.2	0.11036227	0.55596305	0.52078429	0.00148779
2.4	0.00250768	0.52018527	0.51041475	0.10048894
2.6	−0.09680495	0.47081827	0.48133059	0.18836354
2.8	−0.18503603	0.40970925	0.43591599	0.26354539
3.0	−0.26005195	0.33905896	0.37685001	0.32467442
3.2	−0.32018817	0.26134325	0.30705325	0.37071134
3.4	−0.36429560	0.17922585	0.22961534	0.40101529
3.6	−0.39176898	0.09546555	0.14771001	0.41539176
3.8	−0.40255641	0.01282100	0.06450325	0.41411469
4.0	−0.39714981	−0.06604333	−0.01694074	0.39792571
4.2	−0.37655705	−0.13864694	−0.09375120	0.36801281
4.4	−0.34225679	−0.20277552	−0.16333646	0.32597067
4.6	−0.29613782	−0.25655284	−0.22345995	0.27374524
4.8	−0.24042533	−0.29849986	−0.27230379	0.21356517
5.0	−0.17759677	−0.32757914	−0.30851763	0.14786314

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^{x}K_0(x)$	$e^{x}K_1(x)$
0.0	1.00000000	0.00000000	∞	∞
0.2	0.82693855	0.08228312	2.14075732	5.83338603
0.4	0.69740217	0.13676322	1.66268209	3.25867388
0.6	0.59932720	0.17216442	1.41673762	2.37392004
0.8	0.52414894	0.19449869	1.25820312	1.91793030
1.0	0.46575961	0.20791042	1.14446308	1.63615349
1.2	0.41978208	0.21525686	1.05748453	1.44289755
1.4	0.38306252	0.21850759	0.98807000	1.30105374
1.6	0.35331500	0.21901949	0.93094598	1.19186757
1.8	0.32887195	0.21772628	0.88283353	1.10480537
2.0	0.30850832	0.21526929	0.84156822	1.03347685
2.2	0.29131733	0.21208773	0.80565398	0.97377017
2.4	0.27662232	0.20848109	0.77401814	0.92291367
2.6	0.26391400	0.20465225	0.74586824	0.87896728
2.8	0.25280553	0.20073741	0.72060413	0.84053006
3.0	0.24300035	0.19682671	0.69776160	0.80656348
3.2	0.23426883	0.19297862	0.67697511	0.77628028
3.4	0.22643140	0.18922985	0.65795227	0.74907206
3.6	0.21934622	0.18560225	0.64045596	0.72446066
3.8	0.21290013	0.18210758	0.62429158	0.70206469
4.0	0.20700192	0.17875084	0.60929767	0.68157595
4.2	0.20157738	0.17553253	0.59533899	0.66274241
4.4	0.19656556	0.17245023	0.58230127	0.64535587
4.6	0.19191592	0.16949973	0.57008720	0.62924264
4.8	0.18758620	0.16667571	0.55861332	0.61425660
5.0	0.18354081	0.16397227	0.54780756	0.60027386

جداول التابعين غاما وبيتا

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt \qquad [\operatorname{Re} z > 0]$$

$$\Gamma(z) = x^z \int_0^\infty e^{-xt}t^{z-1}\,dt \qquad [\operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} x > 0]$$

$$\Gamma(z) = \frac{2a^z e^a}{\sin\pi z}\int_0^\infty e^{-at^2}\left(1+t^2\right)^{z-\frac{1}{2}}\cos\left[2at + (2z-1)\arctan t\right]\,dt \qquad [a > 0]$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\sin\pi z}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{z-1}\left(1+t^2\right)^{\frac{z}{2}}\left\{3\sin\left[t + z\operatorname{arccot}(-t)\right] + \sin\left[t + (z-2)\operatorname{arccot}(-t)\right]\right\}$$

[arccot denotes an obtuse angle]

$$\Gamma(y) = x^y e^{-i\beta y}\int_0^\infty t^{y-1}\exp\left(-xte^{-i\beta}\right)\,dt \qquad \left[x, y, \beta \text{ real}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad |\beta| < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Gamma(z) = \frac{b^z}{2\sin\pi z}\int_{-\infty}^\infty e^{bti}(it)^{z-1}\,dt \qquad [b > 0, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1]$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}(t-z)t^{z-1}\ln t\,dt$$

$$[\operatorname{Re} z > 0]$$

$$\Gamma(z) = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(zt - e^t\right)\,dt$$

$$[\operatorname{Re} z > 0]$$

$$\Gamma(x)\cos\alpha x = \lambda^x \int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos\left(\lambda t\sin\alpha\right)\,dt$$

$$\left[\lambda > 0, \quad x > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Gamma(x)\sin\alpha x = \lambda^x \int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin\left(\lambda t\sin\alpha\right)\,dt$$

$$\left[\lambda > 0, \quad x > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Gamma(-z) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{t^k}{k!}}{t^{z+1}}\right]\,dt \qquad [n = \lfloor \operatorname{Re} z \rfloor]$$

$$\Gamma\left(\frac{z+1}{v}\right) = vu^{\frac{z+1}{v}} \int_0^\infty \exp\left(-ut^v\right)t^z\,dt \qquad [\operatorname{Re} u > 0, \quad \operatorname{Re} v > 0, \quad \operatorname{Re} z > -1]$$

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \qquad [z \to 0, \text{ in } |\arg z| < \pi]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi}\int_C (-t)^{-z}e^{-t}\,dt$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{bti}}{(a+it)^2}\,dt = \frac{2\pi e^{-ab}b^{z-1}}{\Gamma(z)}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-bti}}{(a+it)^z}\,dt = 0 \qquad \left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad |\arg(a+it)| < \tfrac{1}{2}\pi\right]$$

$$\Gamma(z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$\left[c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} s_{k+1} c_{n-k}}{n+1}; \quad s_1 = \boldsymbol{C}, \quad s_n = \zeta(n) \text{ for } n \geq 2, \quad |z| < 1\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

$$\left[d_0 = 1, \quad d_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} s_{k+1} d_{n-k}}{n+1}; \quad s_1 = \boldsymbol{C}, \quad s_n = \zeta(n) \text{ for } n \geq 2\right]$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= e^{-\boldsymbol{C}z} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1+\frac{z}{k}} && [\operatorname{Re} z > 0] \\
&= \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{1+\frac{z}{k}} && [\operatorname{Re} z > 0] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{z+k} && [\operatorname{Re} z > 0]
\end{aligned}$$

$$\Gamma(z) = 2z^z e^{-z} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt[2^k]{\mathrm{B}\left(2^{k-1}z, \tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(1+z) = 4^z \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{z}{2^k}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\gamma)\,\Gamma(\beta-\gamma)} = \prod_{k=0}^{\infty} \left[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha+k}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta+k}\right)\right]$$

$$\frac{e^{\boldsymbol{C}x}\,\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-x+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1-\frac{x}{z+k}\right) e^{x/k}\right] \qquad [z \neq 0, -1, -2, \ldots; \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re}(z-x) > 0]$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{2k-1}\right)\left(1+\frac{z}{2k}\right)$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt^*$$

$$= 2\int_0^1 t^{2x-1}\left(1-t^2\right)^{y-1}\,dt \qquad [\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0]$$

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\varphi\cos^{2y-1}\varphi\,d\varphi \qquad [\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0]$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{t^{2x-1}}{\left(1+t^2\right)^{x+y}}\,dt \qquad [\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0]$$

$$\mathrm{B}(x,y) = 2^{2-y-x}\int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{2x-1}(1-t)^{2y-1}}{\left(1+t^2\right)^{x+y}}\,dt \qquad [\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0]$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt = \int_1^\infty \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt \qquad [\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0]$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{1}{2^{x+y-1}}\int_0^1 \left[(1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1} + (1+t)^{y-1}(1-t)^{x-1}\right]\,dt$$

$$[\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0]$$

$$\mathrm{B}(x,y) = z^y(1+z)^x\int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+z)^{x+y}}\,dt$$

$$[\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0, \quad 0 > z > -1, \quad \operatorname{Re}(x+y) < 1]$$

$$\mathrm{B}(x,y) = z^y(1+z)^x\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi}{\left(z+\cos^2\varphi\right)^{x+y}}\,d\varphi$$

$$[\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0, \quad 0 > z > -1, \quad \operatorname{Re}(x+y) < 1]$$



الملحــق



ملحق المصطلحات العلمية

باللغة الإنكليزية والفرنسية

الإنكليزية	الفرنسية	العربية
Absolute Error	Erreur Absolute	الخطأ المطلق
Adiabatic	Adiabatique	كظيم
Amplitude	Amplitude	سعة
Angle	Angle	زاوية
Solid	Solide	زاوية مجسمة
Argument	Argument	السعة
Asymptotic Expansion	Développment Asymptotique	نشر مقارب
Augmented Matrix	Matrice Aumenter	
Axis	Axe	المحور
Coordinate	De coordonnées	محور الإحداثيات
Imaginary	Imaginaire	المحور التخيلي
Real	Réel	المحور الحقيقي
Bound	Borne	الحد
Greatest Lower	Supérieur	الحد الأعلى الأصغري
Least Upper	Inférieure	الحد الأدنى الأعظمي
Branch	Branche	الفرع
Principal	Principale	الفرع الأساسي
Centre of Gravity	Centre de gravité	مركز الثقل

Centroid	Centroïde	المركز المتوسط
Class	Classe	الصف
Coefficients	Coefficients	أمثال
Complex	Complexe	العقدي
Complex Conjugate	Complexe	المرافق العقدي
Computer	Ordinateur	الحاسب
Conditions	Conditions	الشروط
Boundary	Aux limites	الشروط الحدية
Initial	Initiales	الشروط الابتدائية
Conductivity	Conductibilité	الناقلية – الإيصال
Constant	Constant	ثابت
Arbitrary	Arbitraire	ثابت اختياري
Dielectric	Diélectrique	ثابت السماحية
Continious	Continuite	مستمر
Contour	Contour	إطار – محيط
Convergence	Convergence	التقارب
Absolute	Absolue	التقارب المطلق
Conditional	Non-absolue	التقارب الشرطي
Domain of	Domain de	نطاق التقارب
Radius of	Rayon de	نصف قطر التقارب
Convolution	Convolution	الطيّ
Coordinates	Coordonées	إحداثيات
Cartesian	Cartésiennes	إحداثيات ديكارتية

Curvilinear	Curvilignes	إحداثيات منحنية
Cylindrical	Cylindrique	إحداثيات اسطوانية
Orthogonal Curvilinear	Curvilignes orthogonales	إحداثيات منحنية متعامدة
Polar	Polaires	إحداثيات قطبية
Spherical	Sphériques	إحداثيات كروية
Cusp	Point de rebroussement	نقطة تراجع
Current density	Densité de courant	كثافة التيار
Curvature	Courboure	التقوس
Curves	Courbes	منحنيات
Closed	Fermées	منحنيات مغلقة
Equivalent	équivalentes	منحنيات متكافئة
Open	Ouvertes	منحنيات مفتوحة
Oriented	Orientées	منحنيات موجهة
Plane	Planes	منحنيات مستوية
Sectionally Smooth	--------------	منحنيات صقيلة جزئياً
Simple	Courpes simples	منحنيات بسيطة
Smooth		منحنيات صقيلة
Space	Gauches	منحنيات فراغية
Degree	Degré	درجة
Dependent	Dépendant	مرتبط – غير مستقل

Linearly	Linéairement	مرتبط خطياً
Derivative	Dérivée	مشتق
Directional	Dans une direction	مشتق موجه
Ordinary	Ordinaire	مشتق عادي
Partial	Partielle	مشتق جزئي
Total	Totale	مشتق كلي
Determinant	Déterminant	المعين
Functional	Fonctionnel	المعين التابعي
Minors of	Mineurs de	صغار المعين
Differential	Différentielle	التفاضل
Exact	Exacte	التفاضل التام
Differential Equations	équations différentielles	معادلات تفاضلية
Exact	Exactes	معادلات تفاضلية تامة
Homogeneous	Homogènes	معادلات تفاضلية متجانسة
Linear	Linéaires	معادلات تفاضلية خطية
Ordinary	Ordinaires	معادلات تفاضلية عادية
Partial	Aux dérivées	معادلات تفاضلية جزئية
System of	Système d'	جملة معادلات تفاضلية
Diffusivity	Diffusion	الانتشار
Dimension	Dimension	بعد
Direction	Direction	التوجيه – الاتجاه
Displacement	Déplacement	الإزاحة

Discontinious	Discontinuite	غير مستمر
Domain	Domaine	نطاق
Multiply connected	Mutliplement connex	نطاق متعدد الاتصال
Simply connected	Simplement connex	نطاق بسيط الاتصال
Electrodynamics	électrodynamique	الكهرباء الحركية
Electrostatics	éléctrostatique	الكهرباء الساكنة
Element	Elément	العنصر
Oriented	Orienté	العنصر الموجه
Imaginary	Imaginaire	العنصر التخيلي
Element of area	Elément d'aire	عنصر المساحة
Element of length	De longeur	عنصر الطول
Element of volume	De volume	عنصر الحجم
Ellipsoid	Ellipsoïde	مجسم القطع الناقص
Equations	Equations	معادلات
Algebraic	Algébriques	معادلات جبرية
Characteristic	Caratéristiques	معادلات مميزة
Error Function	Fonction d'Erreur	تابع الخطأ
Even	Paire	زوجي
Expansion	Développement	النشر
Finite	Fini	النشر المنتهي
Infinite	Infini	النشر غير المنتهي
Extremum	Maximum, minimum	نهاية حدية
Conditional	Conditionnel	نهاية حدية مقيدة

English	Français	العربية
Relative	Relatif	نهاية حدية نسبية
Factor	Facteur	عامل
Damping	Amortissent	عامل التخامد
Integrating	Intégrant	عامل تكميل
Factorial	Factorielle	العاملي
Field	Corps commutatif – champ	حقل
Fluid	Fluide	مائع
Compressible	Compressible	مائع قابل للانضغاط
Ideal	Parfait	مائع مثالي
Formulas	Formules	صيغ
Function	Fonction	تابع
Analytic	Analytique	تابع تحليلي
Arbitrary	Arbitraire	تابع اختياري
Bounded	Bornée	تابع محدد
Circular	Circulaire	تابع دائري
Complementary	Complémentaire	تابع مكمل
Complex	Complexe	تابع عقدي
Conjugate	Conjuguée	تابع مترافق
Continuous	Continue	تابع مستمر
Differentiable	Dérivable	تابع قابل للاشتقاق
Elementary	élémentaire	تابع ابتدائي
Explicit	Explicite	تابع صريح
Harmonic	Harmonique	تابع توافقي
Hyperbolic	Hyperbolique	تابع قطعي

Implicit	Implicite	تابع مستتر
Inverse	Réciproque	تابع عكسي
Potential	Potentielle	تابع الكمون
Primitive	Primitive	تابع أصلي
Rational algebraic	Algébrique rationelle	تابع كسري جبري عادي
Real	Réelle	تابع حقيقي
Scalar	Scalaire	تابع عددي
Sectionally continuous	-------------	تابع مستمر جزئياً
Vector	Vectorielle	تابع شعاعي
Fundamental	Fondamental	أساسي
Geometry	Géométrie	هندسة
Analytic	Analytique	هندسة تحليلية
Vector	Vectorielle	هندسة شعاعية
Gradient	Gradient	تدرج
Harmonic Analysis	Analyse Harmonique	تحليل توافقي
Heat Equation	Equation de la Thermique	معادلة حرارة
Homogeneous	Homogène	متجانس
Hyperboloid	Hyperboloïde	مجسم القطع الزائد
Image	Image	الصورة
Inverse	Réciproque	الصورة العكسية
Imaginary	Imaginaire	تخيلي
Increment	Incrément	تزايد
Induction	Induction	التحريض
Independent	Indépendant	مستقل
Linearly	Linearment indépendent	مستقل خطياً

English	Français	عربي
Inertia	Inertie	عطالة
Moment of	Moment d'	عزم العطالة
Integrals	Intégrales	تكاملات
Double	Doubles	تكاملات ثنائية
Improper	Généralisées	تكاملات شاذة
Iterated	--------------	تكاملات متتالية
Line	Curvilignes	تكاملات خطية
Simple	Simples	تكاملات بسيطة
Surface	De surfaces	تكاملات سطحية
Triple	Triples	تكاملات ثلاثية
Volume	De volumes	تكاملات حجمية
Interpolation	Interpolation	التمديد الداخلي
Interval	Intervalle	مجال
Inversion	Inversion	الانعكاس
Isotropic	Isotrope	تعادلي الخواص
Iterative Methods	Méthode itérative	الطريقة التكرارية
Jacobian	Jacobien	اليعقوبي
Line	Ligne-droite	خط منحنٍ أو مستقيم
Binormal	Droite binormale	الناظم الثنائي
Branch	De ramification	مستقيم التفرع
Normal	De normale	مستقيم ناظم
Stream	Ligne de courant	خط الجريان
Tangent	Droite tangente	مستقيم مماس
Vortex	Ligne de rotation	خط الإعصار
Linear	Lineaire	خطي

English	Français	عربي
Mapping	Application	تطبيق
Bijective	Bijection	تطبيق تقابل
Conformal	Application conforme	تطبيق مطابق
Inverse	Réciproque	تطبيق عكسي
Matrix	Matrice	المصفوفة
Maximum	Maximum	نهاية عظمى
Mean Value	Valeur Moyenne	قيمة وسطى
Minimum	Minimum	نهاية صغرى
Modulus	Module	طويلة – مطلق
Neighbourhood	Voisinage	الجوار
Normal Mode	Mode Normale	حل نظامي
Number	Nombre	عدد
Complex	Complex	عدد عقدي
Imaginary	Imaginaire	عدد تخيلي
Rational	Rationnel	عدد عادي
Real	Réel	عدد حقيقي
Odd	Impaire	فردي
Operator	Opérateur	مؤثر
Differential	Différantiel	مؤثر اشتقاقي
Integral	Intégral	مؤثر تكاملي
Hamiltonian	Hamiltonien	مؤثر هاميلتون
Laplacian	Laplacien	مؤثر لابلاس
Order	Ordre	مرتبة – درجة
Orthogonal Functions	Fonctions Orthogonales	توابع متعامدة
Orthonormal Functions	Fonctions Orthonormales	توابع متعامدة نظامياً
Oscillation	Oscillation	اهتزاز
Amplitude of	Amplitude d'	سعة الاهتزاز

English	Français	العربية
Damped	Amortisée	اهتزاز متخامد
Forced	Forcée	اهتزاز قسري
Free	Libre	اهتزاز حر
Period	Période d'	دور الاهتزاز
Simple	Simple	اهتزاز بسيط
Paraboloid	Paraboloïde	مجسم القطع المكافئ
Elliptic	Elliptique	مجسم القطع الناقصي
Hyperbolic	Hyperbolique	مجسم القطع الزائدي
Parameters	Paramètres	وسطاء
Variation of	Varation des	تغيير الوسطاء
Part	Partie	الجزء
Analytic	Analytique	الجزء التحليلي
Imaginary	Imaginaire	الجزء التخيلي
Principal	Principale	الجزء الرئيسي
Real	Réelle	الجزء الحقيقي
Partial	Partielle	جزئي
Partition	Partition	التجزئة
Pencils	Faisceaux	الحزم
Period	Période	دور
Periodic Function	Fonction Périodique	تابع دوري
Permeability	Perméabilité	النفوذية
Permutation	Permutation	التبديل
Phase	Phase	الطور
Phase Angle	Angle de Phase	زاوية الطور
Piecewise Continious	Continuite dans intervalle	مستمر ضمن قطع
Plane	Plan	المستوي
Complex	Complexe	العقدي

Osculating	Osculateur	الملاصق
Tangent	Tangent	المماس
Point	Point	نقطة
Branch	De ramification	نقطة تفرع
Boundary	Frontière	نقطة محيطية
Critical	Critique	نقطة حرجة
Exterior	Extérieur	نقطة خارجية
Interior	Intérieur	نقطة داخلية
Limit	D'accumulation	نقطة نهاية
Multiple	Multiple	نقطة متعددة
Saddle	------------	نقطة تسرج
Singular	Singulier	نقطة شاذة
Point set	Ensemble de points	مجموعة نقطية
Arcwise connected	------------	مجموعة نقطية متصلة قوسياً
Bounded	Borné	مجموعة نقطية محددة
Closure of	------------	مجموعة الإغلاق
Diameter of	Diamètre d'	قطر المجموعة
Open	Ouvert	مجموعة نقطية مفتوحة
Subset of	Sous-ensemble d'	مجموعة جزئية
Pole	Pôle	القطب
Polynomials	Polynômes	كثيرات حدود
Position	Position	موضع
Function of	Fonction de points	تابع للموضع –

English	Français	العربية
		تابع نقطي
Potential	Potentiel	الكمون
Scalar	Scalaire	الكمون العددي
Vector	Vecteur	الكمون الشعاعي
Projection	Projection	المسقط
Region	Région	منطقة
Simple	Simple	منطقة بسيطة
Sub-	Sous-	منطقة جزئية
Two-dimensional	Du plan	منطقة مستوية
Three-dimensional	De l'espace	منطقة فراغية
Residue	Résidu	الراسب
Resonance	Résonance	الطنين
Sector	Secteur	قطاع
Sequence	Suite	متتالية
Series	Séries	سلسلة
Convergent	Convergentes	سلسلة متقاربة
Divergent	Divergentes	سلسلة متباعدة
Finite	Finies	سلسلة منتهية
Infinite	De fonctions	سلسلة غير منتهية
Functional	Infinies	سلسلة تابعية
Numerical	Numériques	سلسلة عددية
Power	Entières	سلسلة صحيحة
Shift	Translation	سحب
Singular point	Point singulier	نقطة شاذة
Essential	Essentiel	نقطة شاذة

English	French	Arabic
		أساسية
Isolated	Isolé	نقطة شاذة منعزلة
Removable	------------	نقطة تمكن إزالتها
Solution	Solution	الحل
General	Générale	الحل العام
Particular	Particulière	الحل الخاص
Space	Espace	الفراغ
Dimensions of	Dimensions d'	أبعاد الفراغ
Euclidean	Euclidien	الفراغ الإقليدي
Vector	Vectoriel	الفراغ الشعاعي
Special Function	Fonction Spéciale	تابع خاص
State	Régime	الحالة
Steady	Permanent	الحالة المستقرة
Transient	Transitoire	الحالة العارضة أو العابرة
Surface	Surface	سطح
Algebraic	Algébrique	سطح جبري
Closed	Fermée	سطح مغلق
Level	De niveau	سطح السوية
Open	Ouverte	سطح مفتوح
Oriented	Orientée	سطح موجه
Sectionally smooth	-----------	سطح صقيل جزئياً
Simple	Simple	سطح بسيط
Smooth	-----------	سطح صقيل

English	Français	العربية
Step Function	Fonction échelon	تابع الدرجة
Symmetry	Symétrie	تناظر
Axial	Axiale	تناظر محوري
Axis of	Axe de	محور التناظر
Radial	Radiale	تناظر مركزي
System	Systéme	جملة
Tables	Tables	جداول
Torsion	Torsion	الالتفاف
Transfer Function	Fonction de Transfert	تابع التحويل – الانتقال
Transformation	Transformation	تحويل
Undetermined coefficients	Coefficient indeterminés	أمثال غير معينة
Unit Impulse	Impulsion Unité	نبضة أحادية
Value	Valeur	القيمة
Principal	Principale	القيمة الأساسية
Variable	Variable	متحول
Complex	Complexe	متحول عقدي
Dependent	Dépendent	متحول غير مستقل
Independent	Indépendant	متحول مستقل
Real	Réelle	متحول حقيقي
Vector	Vacteur	شعاع
Components	Composants du	مركبات الشعاع
Direction of	Direction du	اتجاه الشعاع
Free	Libre	شعاع طليق
Line of	Support de	منحى الشعاع
Modulus of	Module de	طويلة الشعاع
Position	-------------	شعاع الموضع

Unit	Unitaire	شعاع التوجيه
Vector function	Fonction vectorielle	تابع شعاعي
Circulation	Circulation de	جولان التابع الشعاعي
Lamellar	Lamellaire	التابع الشعاعي الكموني
Dievergence	Divergence de	تفرق التابع الشعاعي
Flux of	Flux de	تدفق التابع الشعاعي
Rotation of	Rationnel de	دوران التابع الشعاعي
Solenoidal	Solénoïdale	التابع الشعاعي اللولبي
Vibration	Vibration	اهتزازات
Wave Equation	Equation d' ondes	معادلة موجية



المؤلف في سطور

عازار معروف الشايب (1949) حصل على إجازة في العلوم الرياضية والفيزيائية عام 1971 ثم على دبلوم تربية 1972 من جامعة دمشق.

عمل في مجال التربية والتعليم حتى إيفاده عام 1978 حصل على شهادة الدكتوراه من جامعة موسكو الحكومية Lomonosov Moscow State University باختصاص سيبرنيتك رياضي عام 1985. مجالات عمله رياضيات متقطعة Discrete Mathematics _ نظرية التعرف على الأشكال Pattern Recognition Theory _ نظرية أوتوماتيك الرياضي _ المنطق والمجموعات الغائمة Fuzzy Logic & Sets.

له عدة مؤلفات جامعية وغير جامعية، نشر أبحاثاً عديدة في مجال الرياضيات التطبيقية واستخدامها في الاقتصاد والسياسة وعلم الاجتماع والطب. أستاذ في جامعة دمشق كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

درس في جامعة دمشق على يد الأساتذة عبد الغني الطنطاوي، صلاح الأحمد ،واثق شهيد.

في جامعة موسكو أشرف على دراسته فاليري باريسوفيتش كودريافتيسف.

* * *



ملحق الأعلام

1 – الخوارزمي محمد بن موسى (780–874)al-Khwarizmi :

ولد في مدينة خوارزم وترعرع في بغداد في زمن الخليفة المأمون وعاش وتوفي فيها ، أول من أعطى لعلم الجبر وجهاً مستقلاً عن علم الحساب وأول من استعمل كلمة جبر وأخذت عنه في العالم .

أهم مؤلفاته كتاب الجبر والمقابلة ولا تزال كلمة اللغارتم تستعمل في العالم وهي مأخوذة عن اسمه خوارزم ، برع في علم الفلك.

2 –آبل نيلس هنريك (1802–1829):Niels Abel

رياضي نرويجي درس في جامع أوسلو ونشر في عام 1824 برهان عدم إمكانية حل معادلات الدرجة الخامسة بشكل عام بالشكل الجبري العام .

عمل بين عامي 1825–1827 في برلين وباريس في المجلة الرياضية التي يصدرها العالم الألماني الرياضي كيل .

عاش حياة صعبة وتوفي بالسل عام 1829 ، في حياته القصيرة هذه قدم إنتاجاً غزيراً لعلم الرياضيات خدم الرياضيات خدمة جليلة وبخاصة علم الجبر الحديث.

3–اقليدس (365–300 ق .م)Euclid of Alexandria :

رياضي إغريقي مؤلف المخطوطات الرياضية الأولى ، ولد في أثينا وتتلمذ على يد أفلاطون أهم أعماله كانت في مدينة الاسكندرية حيث أسس مدرسة رياضية وكتب فيها كتابه الأول البدايات (العناصر الذي حوى أهم مبادئ الهندسة المستوية والفراغية وسلسلة أسئلة حول نظرية الأعداد والجبر ونظرية الكسور العامة وعرف المساحة والحجم وكذلك مبادئ نظرية النهايات.

إن القيمة التاريخية لكتاب البدايات تتلخص في أن اقليدس وضع المحاولات الأولى لبناء علم الهندسة المستوية والفراغية اعتماداً على موضوعات وبدهيات أساسية هذه المحاولات التي أصبحت فيما بعد أساساً منهجياً في بناء علوم رياضية وغير رياضية أخرى.

4 -باناخ ستيفان (1892–1945)Stefan Banach :

رياضي بولوني عضو مراسل في أكاديمية العلوم البولونية. ولد في مدينة كاراكوف وأنهى دراسته الجامعية في جامعة الفوف (في الاتحاد السوفيتي سابقاً) عام 1914 حصل على شهادة الدكتوراة في الفلسفة ، عام 1920 وأصبح أستاذاً في الجامعة نفسها عام 1924 .

عمل في البداية في معهد البولوتيكينكا في الفوف.

أهم أعماله كانت في مجال التحليل التابعي وهو واحد من مؤسسي هذا العلم المعاصر ومن مؤسسي مدرسة الفوف الرياضية وله سمعة عالمية في مجال الرياضيات.
دراساته في الفراغات الخطية (فراغات باناخ) لها قيمة كبيرة في الرياضيات المعاصرة، له كثير من النتائج التي دخلت كتباً كثيرة في التحليل الدالي، كما أن له دراسات عدة في المعادلات التفاضلية العادية ونظرية الدوال المركبة.

حصل على جائزة أكاديمية العلوم البولونية عام 1939 كما اختير عضواً في أكادمية العلوم الأوكرانية عام 1940.

5 -البوزجاني محمد بن محمد بن يحيى (941–998):

ولد في بوزجان وتوفي في بغداد . كتب أبو الوفا البوزجاني في علم الجبر وزاد على أبحاث الخوارزمي زيادة أثرت في علم الجبر والهندسة والعلاقة بينهما. أول من عرف النسبة المثلثية (الظل).

6 -برنولي (عائلة برنولي) Bernoulli:

عائلة سويسرية بدأت شهرتها من العالم الرياضي المعروف يعقوب برنولي (توفي 1583) وحفيده يعقوب برنولي (1598–1634) ثم يعقوب برنولي الثاني (1654–1705) وهو الذي ولد في مدينة بازل ودرس اللاهوت حسب رغبة والده، وعمل بعدها في مجال الرياضيات ومحاضراً بعدها في علم الفيزياء التجريبية وفي عام 1687 أصبح أستاذاً في الرياضيات في جامعة بازل .

أهم أعماله كانت في مجال المتناهيات في الصفر والسلاسل وحساب التفاضل ونظرية الاحتمال، تعرف على ليبتنز وعمل معه في مجال الحسابات التفاضلية واكتشف كثيراً من المنحنيات الشهيرة نذكر منها الحلزون اللغارتمي والليمنسكات (المنحني البيضوي) وغيرها كما أنه عرّف مساحة المثلث الكروي، ويعد كتابه في الحسابات التقريبية وفي مجال نظرية السلاسل غير المنتهية أول مرجع في ذلك المجال له أعمال أخرى في مجال الفيزياء والحساب والجبر والهندسة بفضله حصلت نظرية الاحتمالات على قيمة تطبيقية كبيرة من بين طلابه العالم الكبير أويلر ، وأخوه ليفون برنولي (1667–1748) الذي ولد في بلدة بازل أيضاً وأصبح أستاذاً في جامعتها عام 1695 وفي جامعة هولندا بعدها وعضواً في أكادمية العلوم الروسية في بطرس بورغ عام 1705 (لينينغراد حالياً) تابع عمله (بتوجيه من أخيه يعقوب) في مجال الرياضيات والطب أيضاً ، من طلابه العالم المشهور أوتال ، درس في جامعة باريس وحصل هناك على نتائج عظيمة في حسابات التكامل والتفاضل مع العالم ليبتنز وطور نظرية التوابع الأسية وطرق إزالة عدم التعين المعروفة باسم نظرية أوبيتال وأوجد طرق مكاملة التوابع الكسرية العادية وحساب المساحات وأطوال الأقواس المستوية بطريقة التكامل .

تابع حفيده نيقولاي برنولي (1687–1759) أعمال أجداده وعمل أستاذاً في جامعة مدينة باوي وبعدها أستاذاً للمنطق في جامعة بازل. عمل في نظرية الاحتمال وحساب التكامل وفي عام 1713 وضع مسألة عرفت بعدها باسم مسألة بطرس بورغ، وعرفت

أعماله في مجال عدم اعتماد المشتق (بعض الحالات) الجزئية على الترتيب وحل معادلة ريكاتي في المعادلات التفاضلية.

بعد ذلك عمل حفيد ليفون برنولي وهو نيقولاي برنولي (1795–1726) في مجال الحالات الخاصة لمعادلة ريكاتي وطبق طرق المكاملة بالعوامل التكاملية الموجبة في حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى المعروفة باسم معادلة أويلروكليرو وكان عضواً في أكاديمية علوم بطرس بورغ وأستاذاً في جامعة بازل.

دانيل ليفون برنولي (1700–1782) أحد عظماء الرياضيات والفيزياء ولد في هولندا. عمل تحت توجيه أبيه وأخيه نقولاي وأنهى دراسته في جامعة بازل عام 1716 ودرس بعدها الطب والفيزيولوجيا ثم عمل في أكادمية علوم بطرس بورغ وكان عضواً فيها .

تنسب له أعمال كثيرة في مجال الجبر والمعادلات التفاضلية العادية وفي نظرية الاحتمال والسلاسل غير المنتهية كما نسب له تعريف العدد e وفق نهاية المقدار

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \; .$$

اختيرت أعماله كأحسن الأعمال (عشر مرات) في الرياضيات والفيزياء في أكاديمية العلوم الباريسية.

7 -برنشتاين (سرجي) (1880–1968)Sergi Bernstein :

رياضي سوفيتي عضو في أكاديمية العلوم السوفيتتية منذ عام 1929 ولد في أوديسا وأنهى دراسته فيها وفي 1899. درس في معهد البوليتكنيك في باريس وحصل على شهادة الدكتوراة عام 1904 من باريس وأصبح أستاذاً عام 1907 ثم حصل على شهادة الدكتوراة الثانية عام 1914 من مدينة خاركوف وقام بتدريس الرياضيات في جامعة مدينة خاركوف عام 1933– 1941 .

أهم أعماله كانت في نظرية المعادلات التفاضلية ونظرية تقريب توابع كثيرات الحدود ونظرية الاحتمالات.

8 -بول (جورج 1815 –1864) George Boole:

رياضي انكليزي مؤسس علم المنطق الرياضي ولد في مدينة لينكولن (في إيرلندا) بعد أن أنهى الدراسة وعين مباشرةً مدرساً في مدارس لندن درس بعدها بصورة مستقلة الرياضيات العالية باللغات الأوربية (اللاتينية واليونانية عرفهما وهو في المرحلة الثانوية) .

اختير بعدها استاذاً في جامعة كورك في إيرلندا (عام 1949) لكن عمله الرئيسي هذا لم يثنه عن نشر أعماله في الجمعية الملكية العلمية البريطانية وبسبب ذلك منح ميدالية هذه الجمعية .

عمل بول في مجال نظرية الاحتمال والمنطق الرياضي أما أعماله الرئيسية فكانت في وضع أسس علم الجبر المنطق الذي عرف بعدها بجبر بول والذي كان له تطبيقاته الهامة في التكنولوجيا وبخاصة في الأبحاث النظرية التي عرفت بعدها باسم نظرية الدارات المنطقية.

وكما هو معلوم أيضاً (في نظرية الطبولوجيا العامة) وفراغ بول من تطبيقات كثيرة.

9 -تايلور (بروك 1685–1731) Taylor :

رياضي وفيلسوف انكليزي عضو الجمعية الملكية البريطانية وأمين سرها بحث في نظرية نشر الدوال .

أوجد عام 1751 طريقة نشر الدوال وفق سلسلة قوى صحيحة المعروفة الأن باسمه.

10-جوردان (ادمو ماري كاميليا 1838–1922) Jordan:

عالم رياضي فرنسي ولد في مدينة ليون أنهى دراسته في مدرسة البوليتكنيك وعمل فيها .

أصدر مجلة الرياضيات الفرنسية من عام (1885–1922) وهو عضو في أكاديمية العلوم الروسية منذ عام 1885 (في لينينغراد).

أهم أعماله في الجبر ونظرية الأعداد ونظرية الدوال والهندسة والطبولوجيا والمعادلات التفاضلية ،يرتبط باسمه كثير من النظريات ، وضع مفهوم التغيرات المحدودة للدوال.

11– جيكالكين (ايفان ايفانوفيتش 1869–1947):

رياضي روسي ولد في مدينة منسك وأنهى دراسته في جامعة موسكو عام 1893 وحصل على شهادة الدكتوراه في العلوم الرياضية والفيزيائية عام 1902 وعين أستاذاً في الجامعة عام 1911 هجر الجامعة بسبب الاضطهاد القيصري له وعاد إليها عام 1917 وعمل فيها حتى نهاية حياته.

أسس أول حلقة بحث في الاتحاد السوفيتي للمنطق الرياضي وقاد هذه الحلقة حتى وفاته وشاركه في هذه الحلقة العلماء نوفيكوف وليابونوف وكالماغورف الشهيرون.

أهم أعماله كانت في مجال المنطق الرياضي ونظرية الدوال ذات المتغيرات الحقيقية .

ينسب إليه في مجال المنطق الرياضي بناء جبر المنطق حسب القياس (2) (الأساس الرياضي لبناء الآلات الحاسبة) وكذلك لديه كثير من الأعمال في مجال جبر القضايا ونظرية الخوارزميات.

12– الخيام (عمر بن ابراهيم 1048–1131):

لقب بالخيام لعمله بصناعة الخيامة لم يكن عالماً رياضياً فحسب بل كان فيلسوفاً وشاعراً وفلكياً .

من أعماله في الجبر مقالات في حل معادلات الدرجات الأولى والثانية والثالثة له مقالة في طرق استخراج الجذر النوني لعدد.

13- دلامبير (جان لينارد 1717 – 1783)Jean le Rond d'Alembert :

رياضي وميكانيكي وفيلسوف فرنسي عضو في أكاديمية العلوم الباريسية منذ عام 1741 وعضو في أكاديمية العلوم الروسية منذ عام 1764 وعضو في أكاديميات أخرى.

وأظهر منذ طفولته الأولى ذكاءً بارعاً وقوة ملاحظة خارقة حصل على تعليم عالٍ رائع ودرس الحقوق وأصبح محامياً. لفت نظره علم الطب والعلوم الطبيعية الأخرى فدرسها وعمل فيها منذ عام 1739 وحتى عام 1740 قدم لأكاديمية العلوم الفرنسية عملين هامين في حركة الجسم الصلب وديناميكية السوائل وحساب التكامل .

14- ديكارت (رينيه 1596-1650) (اسمه اللاتيني كاريتزي)Descartes, René :

فيلسوف رياضي فرنسي وفيزيائي وفيزيولوجي له مؤلفات عدة في الفلسفة نذكر منها طريقة قيادة الذكاء ، مناقشة حول المنهجية ، تحقيقاً حول الفلسفة الأولى ، بداية الفلسفة وغيرها.

إن أبحاث ديكارت الرياضية مرتبطة جداً بأبحاثه الفلسفية والفيزيائية فلقد كتب كتابه الهندسة عام 1637 وفيه تحدث عن مفهوم المتغيرات والدوال ولقد كان مفهوم المتغير عند ديكارت مشابهاً لمفهوم الفترة (المجال) متغيرة الطول وذات الاتجاه الثابت.

إن جبر ديكارت يختلف عن جبر العالم بيت في أن جبر الأول يحوي دوماً عنصر الفترة الخطية (المجال الخطي) والعمليات عليها والتي تقود إلى الفترات الخطية نفسها مرة ثانية.

هذه المجالات التي تكافئ العمليات عليها محور الأعداد الحقيقية وعلى شكل آخر فإن العدد الحقيقي عند ديكارت ما هو إلا نسبة طول الفترة ما إلى الوحدة ، مثل هذا التعريف قاله نيوتن أيضاً وحصل على الأعداد الحقيقية السالبة بتغير اتجاه الفترات .

ولقد برهن ديكارت أيضاً على حل معادلات الدرجة الثالثة في الحالات الخاصة.

وأهم أعماله التحليلية كان اختراعه لجملة الاحداثيات المتعامدة (الكاريتذية نسبة لاسمه اللاتيني) كما أنه لاحظ أن درجة معادلة منحن لا تتعلق باختيار الجملة الإحداثية .

واعتماداً على اتجاهاته العلمية الرياضية تطورت بعده وعلى مدى 150 عاماً الهندسة التحليلية وعلم الجبر .

من اكتشافاته الأخرى طريقة حساب مساحة السيكلوئيد وبناء مماساته درسها ومعرفته لخواص الحلزون اللغارتمي وعلاقة عدد رؤوس كثير وجوه مع عدد أضلاعه .

15- رول (ميشيل 1652-1715):

رياضي فرنسي عضو أكاديمية العلوم الباريسية منذ عام 1985 عمل فيها حتى نهاية حياته.

تعرف باسم رول طرق إيجاد النهايات الحدية العليا والدنيا للجذور الحقيقية لمعادلة (معادلات) الجبرية وكذلك طريقة حل المعادلات الخطية بمجهولين ذات الجذور الصحيحة انتقد أبحاث ديكارت وليبنتز بصورة حدسية مما ساعد ليتنز على براهينه ولفت نظره إلى ضرورة الاعتماد بشكل أكبر على التحليل الرياضي.

16- ريمان (جورج فردريك برنار 1826-1866) Riemann, Georg Friedrich Bernhard:

رياضي ألماني دكتور في الرياضيات وأستاذ لها في جامعة برلين منذ عام 1851 درس على يد علماء شهيرين أمثال أويلر وليجاندره وديرخلي وياكوبي وشتيز وتوطدت صداقة حميمة بينه وبين ديرخلي وظهرت نتائجها في المجال الرياضي ودافع عن أطروحة الدكتوراه في موضوع الدوال المركبة ذات المتحول الواحد وقدم بعدها بحثين للجامعة أولهما عن إمكان التعبير عن الدوال بوساطة سلاسل مثلثية الرياضيات (1) م – 34 والثاني عن الفرضيات الأساسية في الهندسة الأولية .

كان موضوع رسالته في الدكتوراة بداية لتطور الإثبات الهندسي في نظرية الدوال والطرق الرياضية الفيزيائية وكذلك لعلم الهندسة الحديثة علم الطبولوجيا ترتبط باسمه تسمية سطوح ريمان الشهيرة ومنحنياتها .

17- سيلفستر (جيمس جوزيف 1814-1897) James Joseph Sylvester :

رياضي انكليزي أستاذ في جامعة لندن منذ عام 1841 عضو في جمعية الرياضيين الملكيين وعضو في أكادمية العلوم الروسية في مدينة بطرس بورغ .

كان محامياً أيضاً وفي عام 1871 أصبح مدرساً في جامعة بالتيمور في الولايات المتحدة الأميركية له أكثر من 180 عملاً رياضياً أهمها في مجال الجبر ونظرية الأعداد ونظرية الاحتمال الكلاسيكية.

18- الطوسي (شرف الدين من علماء القرن الثالث عشر):

عاش في دمشق والموصل ينسب إليه اختراع أحد أنواع الاسطرلاب (جهاز لقياس الارتفاعات والحسابات الفلكية) له كتب في الجبر والمقابلة.

19- الطوسي (نصر الدين 1201 -1274) :

له مؤلفات في علم المثلثات والجبر والفلك والهندسة له مؤلف اسمه (كتاب الشكل القطاع) استفادت منه أوروبا في حساب المثلثات المستوية والكروية.

أول من استخدم الحالات الست للمثلث الكروي القائم الزاوية.

20- غاليليو (1564 -1642)Galileo :

فيزيائي وميكانيكي وفلكي ورياضي إيطالي . أحد مؤسسي العلوم الطبيعية الفيزيائية وشاعر لغوي وناقد .

ولد في مدينة بيزا وكان والده موسيقياً فذاً .

عاش غاليليو حتى الحادية عشرة من عمره في بيزا وبعد ذلك انتقل إلى فلارينمو وفي السابعة عشرة من عمره وبتوجيه من والده بدأ يدرس الرياضيات عن طريق دراسة اقليدس وأرخميدس وغيرهما. عمل ما بين عامي 1592 –1610 في مجال الرياضيات والفيزياء وحصل على تسمية الفيلسوف والرياضي الأول عام 1611 وبعدها ذهب إلى روما وأصبح عضواً في أكاديمية دي لينتسه وفي روما جرت المناظرة الرياضية الفلسفية المشهورة حول حركة الأرض وتلقى على أثرها عدة تنبيهات من روما وقيادتها الدينية وطلب منه إيقاف دراساته وعدم نشر نتائجها.

أهم أعماله كانت في الجبر جيث اعتمد عليها بعد ذلك مشاهير العلماء أمثال روفين وآبل في برهان عدم إمكان حل معادلات الدرجة الرابعة بصورة سهلة وفي الحالة العامة.

وضع المفاهيم (بعضها) الأساسية في مجال علم الجبر ونظرية الزمر والزمر الجزئية والقاسم الطبيعي المشترك الأعظم مما كان له أثر كبير في تطور نظرية الكم في الميكانيك الكمي.

21– غوص (كارل فريدريك 1777– 1855)Karl Friedrich Gauss :

رياضي وفلكي وفيزيائي ألماني ولد في مدينة براونتشيفيغ ظهرت عليه ملامح الذكاء منذ طفولته الأولى دافع عام 1799 عن أطروحة الدكتوراه وعين مباشرةً أستاذاً مساعداً في جامعة عتين .

بعد ذلك حضر دراسة حول الأبحاث الحسابية نشرت عام 1801 وهي دراسة تحتوي على نتائج أساسية وجديدة في علم الفلك وحصل على تسمية مدير المعهد الفلك والميكانيك على أثرها.

أعماله كثيرة في مجالات الرياضيات وفروعها المختلفة مثل نظرية الأعداد والميكانيك الكلاسيكي وفي الفيزياء والكهرباء والمغناطيسية والجاذبية.

22- فيرشتراس (كارل فيدور 1815-1897) Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm:

رياضي ألماني ولد في مدينة أوستينيئل لم يحصل على دراسة تخصصية عالية درس الحقوق في بون أعجب بالرياضيات فهجر الحقوق وفي عام 1841 وقدم امتحاناً ليحصل على لقب أستاذ للرياضيات. تابع دراسته الرياضية ومن الأعمال الرياضية الشهيرة التي تنسب إليه برهانه على أن الأعداد المركبة تشكل على حقل الأعداد الحقيقية جبراً تبديلياً ذا عنصر حيادي (واحدي) لا يحوي قواسم للصفر.

23- قره (ثابت سقره 836-901):

ولد في حران وتوفي في بغداد اشتهر بالرياضيات والفلك واللغات والطب والفلسفة له كتاب في الأعداد المتحابة أي الأعداد التي يكون مجموع عواملها متساوياً.

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المساحة المحصورة بين القطع المكافئ ومحوره وخط عمودي على هذا المحور.

24- كانتور (جورج 1845-1918) Cantor, Georg :

رياضي ألماني مبدع نظرية المجموعات ولد في مدينة بطرس بورغ (لينينغراد حالياً)
.

أنهى دراسته في جامعة برلين عام 1867، عمل أستاذاً في جامعة غال بين عامي 1872 –1913 عمل كانتور في نظرية المجموعات غير المنتهية ونظرية الأعداد. برهن على توافق جميع المجموعات الحقيقية غير المنتهية ووضع مفهوم قدرة مجموعة وبين عليه مفهوم عدم تكافؤ مجموعتين وبرهن على وجود مجموعات تكافؤ بعض مجموعاتها الجزئية (مجموعات غير منتهية) كما أنه أوجد مفهوم نقاط التجمع ونقاط النهاية لمجموعة ما.

25– كرياوف (الكسندر نيقولا يفيتش 1863–1945):

رياضي وميكانيكي وعالم ملاحة سوفياتي عضو أكاديمية العلوم السوفييتية منذ عام 1916 .

درس في معهد الملاحة وأنهى دراسته فيه عام 1884 وجهه في الرياضيات العالم الشهير ليوبانيوف وأبدع في مجال التوجيه الملاحي .

في عام 1890 أنهى دراسته في أكاديمية العلوم البحرية وعمل في مجالات عدة في الميكانيك والرياضيات العسكرية منها والمدنية واخترع أجهزة عدة في مجال المدفعية وعلم الملاحة والتوجيه الذاتي كما أنه تابع أعمال الميكانيكيين الكلاسيكيين أمثال نيوتن وأويلر وأبدع في تلك المجالات أخترع أول آلة حاسبة لإجراء عملية تكامل معادلة تفاضلية .

حاز على جواز الدولة في الاتحاد السوفييتي.

26– كاديش (موتشيسلاف فاسيليفيتش 1911–1978):

رياضي سوفييتي في مجال الميكانيك عضو أكاديمية العلوم السوفييتية منذ عام 1946 وفي عام 1953 أصبح عضواً في رئاسة الأكاديمية ثم نائباً للرئيس وفي عام 1961 رئيساً للأكاديمية وحتى نهاية حياته.

ولد في مدينة ريغا وأنهى دراسته في جامعة موسكو عام 1931 وكمل في معهد الأبحاث السوفييتي وفي أكاديمية العلوم في مجالات مختلفة منها الميكانيك ونظرية الاهتزازات وديناميك الفضاء ونظرية السوائل الثقيلة وبرهن على نظرية جوكوف في مجال الغازات كما وضع حلاً لمسائل أساسية في التوازن والاستقرار لمسألة ديرخلي وينسب إليه الدور القيادي في حل مسائل تقريب الدوال ذات المتحولات المركبة .

أعماله كثيرة في مجال الطيران وأبحاث الصواريخ عمل مع زميله العالم (عالم الفضاء) كريلوف وبنيا معاً مدرسة الفضاء وعلم الصواريخ السوفييتي.

27– كيبلر (يوهان 1571–1630)Kepler, Johannes :

رياضي وفلكي ألماني ولد في مدينة فبلور ستات في ألمانيا وفي عام 1588 أنهى دراسته الثانوية ودخل الجامعة حيث درس الرياضيات والفلك وأنهى دراسته فيها عام 1593 وحصل على شهادة الماجستير بعد ذلك بعام درس في الجامعة نفسها وأصدر أول كتاب قيم له بعنوان سر العالم ، كان مناصراً لنظرية كيبرنيكس في الفلك وبسبب اضطهاد المجموعات الدينية له اضطر إلى هجر الجامعة .

أعماله الكبيرة كانت في مجال الفلك فوضع لذلك جداول كثيرة تحدد مسارات الكواكب بقيت جداوله هذه تستعمل أكثر من قرن كما أنه وضع عام 1624 جداول الغارتمية لم تكن مشابهة لجداول العالم نيبر ، ولقد ساعدت جداوله هذه على تبسيط الحسابات في مجال الأعداد الطبيعية والأعداد المكتوبة بالنظام العشري وهو أول من استعمل مصطلح الوسط الحسابي.

عرض كيبلر نظرية النظام الشمسي بدقة وتنبأ بحدوث الحوادث الفلكية الشهيرة من كسوف وخسوف بشكل دقيق .

28– كالموغورف الكسندر نيقولا يفيتش (1903):

عالم روسي رياضي من الطراز الأول عضو أكاديمية العلوم السوفييتية منذ 1939 وعضو في أكاديميات العلوم الأمريكية والفرنسية والانكليزية الإيطالية والألمانية وغيرها .

أنهى دراسته في جامعة موسكو عام 1925 وفي عام 1930 حصل على درجة أستاذ في مجال نظرية الدوال ذات المتحولات الحقيقية له نظريات كثيرة في مجال السلاسل المثلثية ونظرية القياس والمفهوم العام للتكامل والنظرية العامة للعمليات على المجموعات وفي عام 1956 حصل على النتائج هامة في تمثيل التوابع كثيرة المتحولات بوساطة توابع ذات عدد أقل من المتحولات وبخاصة برهن على إمكان تمثيل التوابع ذات أربعة متحولات وأكثر بلالة توابع ذات ثلاثة متحولات.

عام 1957 برهن تلميذه العالم أراوند على مسألة العالم غلبرت الثالثة عشرة ودحض إمكان تمثيل تابع ذي ثلاثة متحولات بتوابع ذات متحولين.

برهن بعدها كالماغورف على إمكان تمثيل تابع المتحولين بوساطة توابع المتحول الواحد .

عمل في كل مجالات الرياضيات وأبدع في كل منها عدا الرياضيات الحسابية فلم ترق له ، أكثر أعماله كان في مجال نظرية الاحتمال والتحليل التابعي والمنطق الرياضي ويعد مؤسس علم الاحتمال الحديث في العالم.

أسس مدرسة رياضية حديثة في الاتحاد السوفييتي وعادها إلى نجاحات مذهلة من بين تلاميذه علماء مشهورين نذكر منهم مالتسيف غيدينكا ونيكولسكي وأوليانوف.

29– كوشي (اغوستين لويس 1789 –1857) Cauchy, Augustin Louis :

رياضي فرنسي عضواً أكاديمية العلوم الفرنسية منذ عام 1816 وعضو في أكاديمية العلوم الروسية منذ عام 1831.

أنهى دراسته الأولى في مدرسة البوليتكينيك (أعلى المدارس الفرنسية) عام 1807 عمل مهندساً مدنياً لفترة ما أهم أعماله كانت في مجال السلاسل والتحليل الرياضي. له مؤلفات كثيرة في مجالات الرياضيات المختلفة وبخاصةً في مجال التحليل الرياضي والتوابع التحليلية المركبة أهم نتائجه كانت في تمثيل لعدد المركب في المستوى بنقطة مما ساعد على حساب التكاملات العقدية والحقيقية المعقدة.

يصعب اختصار مجمل أعماله في هذه النبذة التاريخية.

30– الكندي (أبو يوسف يعقوب بن الصباح 801 –867) Al-Kindi:

ولد وتوفي في بغداد أشهر فلاسفة العرب والمسلمين له فضل في الرياضيات والفلك من مشاهير أقواله إنك لا تنال الفلسفة إلا بالرياضيات له كتب في الحساب والهندسة والفيزياء والفلك.

31– لاغرانج (جوزيف لويس 1736 –1813)Joseph Louis Lagrange :

رياضي وميكانيكي فرنسي عضو أكاديمية العلوم الفرنسية والألمانية منذ عام 1759 و 1772 على الترتيب وعضو في أكاديمية العلوم الروسية عام 1776 ولد في إيطاليا حصل على دراسته العليا في مدرسة المدفعية في مدينة تورين ودرس الرياضيات فيها قبل أن ينهي دراسته .

بدأ أعماله في مجال التحليل الرياضي عام 1703 أسس جمعية الرياضيين في تورين وحولها إلى أكاديمية ونشر فيها كل أعماله هو وتلاميذه على مدى عدة عقود.

لفتت نظره نظرية انتشار الصوت وكتب مذكرات عن ذلك وحدد بشكل دقيق تفسير هذه النظرية.

32- لوباتشوفسكي (نيقولاي ايفانوفيتس 1792 -1856)Lobachevsky :

رياضي روسي مبدع نظرية الهندسة غير التقليدية ولد في مدينة غوركي (حالياً) دخل المدرسة الثانوية في مدينة قازان وعمره 12 سنة ودخل الجامعة عام 1807 وحصل على الماجستير عام 1811 ورشح مباشرةً للحصول على درجة أستاذ في الجامعة نفسها ووضع كتابه (حول العرض المختصر لبداية علم الهندسة) وفيه عرض موضوع بداية علم الهندسة وولد عندها الهندسة اللاقليدية هندسة لوباتشوفسكي وبرهن على صحة أفكارها علماء الرياضيات بعد مرور عشرات السنين ساعدت أفكاره هذه على ولادة علوم جديدة.

33- ماكلورين (كالين 1698 -1746)McLaurin:

رياضي اسكتلندي أستاذ وعضو في الجمعية الملكية الرياضية منذ عام 1719 كان طالباً لنيوتن دخل الجامعة وعمره 12 سنة وفي سن العشرين أصبح رئيساً لقسم الرياضيات في جامعة أربير عمل بتوجيه من نيوتن وحصل على نتائج باهرة في دراسة السلاسل ذات القوى الصحيحة ووضع طريقة لنشر التوابع بوساطة سلاسل القوى الصحيحة كما أنه وضع معياراً لدراسة تقارب السلاسل العددية بوساطة التكامل.

34- هاملتون (1805 -1865) Hamilton:

ميكانيكي ايرلندي عضو أكاديمية العلوم الايرلندية وأكاديمية بطرس بورغ.

ولد في مدينة دوبلن استطاع القراءة وعمره ثلاث سنوات وعلم بشكل مقبول الحساب والجغرافيا وفي عامه العاشر درس اللغات وفي عامه الثاني عشر عرف اثنتي عشر لغة ودرس كتاب بداية الهندسة لإقليدس باللاتينية ودرس نيوتن ولابلاس في عامه السابع عشر ، وأصبح أستاذاً في الفلك في جامعة دوبلن وعمره لم يتجاوز الثانية والعشرين ثم عين مديراً لهذه الجامعة .

أهم أعماله كانت في مجال الميكانيك والمعادلات التفاضلية .

فتح أبواباً جديدة في مجال التحليل التابعي حيث معروف لدى الجميع الدور الهام المؤثر هاملتون.

35-كوديريا فتسيف . فاليري باريسوفيتش (1938)Kudriavtsev :

عالم روسي (سوفييتي) ولد عام 1938 تتلمذ على يد العالم الروسي السوفيتي الشهير ا .ب. لوبانوف (1930 – 2005) الذي كان بدوره تلميذ العالم الروسي يا بلونسكي (1925 _ 2004).

في عام 1964 حصل على شهادة الماستر في الرياضيات والفيزياء من جامعة موسكو الحكومية (MGO)، 1972 حصل على شهادة كانديدات (PH . D)، عام 1982 حصل على شهادة دكتوراه في العلوم في اختصاص رياضيات وفيزياء ثم عين أستاذاً

(بروفيسور) في كلية الرياضيات والميكانيك جامعة موسكو الحكومية. عند افتتاح مخبر المسائل النظرية للسيبرنيتك الرياضي عين رئيساً لهذا المخبر.

عند أحداث قسم النظرية الرياضية للأنظمة الذكية (1991) تم انتخابه رئيساً لهذا القسم وحتى تاريخه .

كوديريا فتسيف حاليا ً ، رئيس تحرير مجلة الأنظمة الذكية ورئيس المجلس الدولي للأنظمة الذكية في جامعة موسكو، ومحرر رئيس في مجلة الرياضيات المتقطعة، مجالات عمله :

الرياضيات المتقطعة _ نظرية الأتوماتيك – نظرية التعرف على الأشكال _ نظرية تحليل وتركيب النظم _ نظرية المجموعات الغائمة والمنطق الغائم _ معالجة المعلومات انتخب عام 2003 رئيسا ً للمؤتمر الدولي الأتوماتيك في أوتوا كندا.

له أكثر من 150 عملاً علمياً بينهم 30 كتاباً و40 براءة اختراع مسجلة في الولايات المتحدة الاميركية واليابان وإنكلترا وغيرها من الدول أوروبية.

درس على يده 120 طالب دكتوراه بينهم مؤلف هذا الكتاب أ . د . عازار معروف الشايب.

المراجع المستخدمة في إعداد الكتاب

1-B.V.SHABAT

1. مقدمة إلى التحليل الرياضي العقدي –الجزء الأول–منشورات دار العلم– موسكوالطبعة السادسة 1997–باللغة الروسية–.

2- B.V.SHABAT

2. مقدمة إلى التحليل الرياضي العقدي الجزء الثاني–منشورات دار العلم– موسكو – الطبعة السادسة 1997–باللغة الروسية– .

3-V.E.SMERNOV

3. الرياضيات العالية –المجلد الثاني–دار العلم –موسكو الطبعة الخامسة1980–باللغة الروسية–.

4- V.E.SMERNOV

4. الرياضيات العالية–المجلد الثالث الجزء الثاني –دار العلم –موسكو–الطبعة الخامسة1980–باللغة الروسية–.

5-G.KORN and T.KORN

5. المرجع في الرياضيات للمهندسين–دار العلم موسكو–1977–باللغة الروسية–.

6-HASAN SALOUTA

6. أ.د. حسن سلوطة: الرياضيات 4– كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية–جامعة دمشق– الطبعةالخامسة .

7-ALHAM HOMSE

7. أ.د. إلهام حمصي: أسس التحليل العقدي–جامعة دمشق–كلية العلوم.

8-G.E.ARKHEPOV, V.A.SADOVNECH, N.CHEBAROV

8. محاضرات في التحليل الرياضي–داردروفا–جامعة موسكو–2003–باللغة الروسية–.

9-P.E.RAMANOVCKEE

9. سلاسل فورييه–نظريةالحقل–التوابع الخاصة –تحويلات لابلاس–دارالعلم–موسكو 1980–باللغة الروسية–.

10-AZAR SHAEB

10. أ.د. عازار الشايب : الرياضيات 5 – كليةالهندسة الميكانيكية والكهربائية–جامعة دمشق– 1998.

11-TON.MENET.U-NUORTH HOLAND

11. المعادلات التفاضلية الفيزيائية- نيويورك-أمستردام-أكسفورد-طبعة ثانية-1985- باللغة الإنجليزية-.

12-H.BATMAN - U.P.KAMBREG

12. المعادلات التفاضلية الجزئية للفيزياء الرياضية-باللغة الروسية-.

13-A.BROMAN

31. مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية HOLAND DY نيويورك-1966 -باللغة الإنجليزية-.

14-M.L.BOAS

14. الطرق الرياضية في العلوم الفيزيائية نيويورك 1983-باللغة الإنجليزية--WELLY

15-R.V.CHURCHIL

15. سلاسل فورييه ومسألةالقيم الحدية نيويورك-1983-باللغة الإنجليزية- -

16-G.F.D.DUFFandD.NAYLOR

16. المعادلات التفاضلية الجزئية للرياضيات التطبيقية-نيويورك1966-باللغة الإنجليزية- WILLY-

17-AZAR SHAEB

17. أ.د. عازار الشايب: الرياضيات 1 كليةالهندسة الميكانيكية والكهربائية-جامعة دمشق1990.

18-I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik

18. أ.س. غرادشتاين، أ.م. رايزهيك

Table of Integrals, Series, and Products -7[ed], Academic Press-USA 2007.

مترجم عن الروسية.

19. Andrei D.Polyanim, Alexander V. Manzhirov

19. أندري د. بوليانيم، أليكساندر ف. مانزيروف

Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists – Chapman & Hall-USA 2007.

المدقق اللغوي:

د . محمد موعد

جامعة دمشق – كلية الآداب

